Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 11.4.2008

Lineare Algebra II

2. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 6) Normale Matrizen

(a) Wiederholen Sie die Definitionen aus der Vorlesung: Wie sind normale lineare Operatoren definiert? Was versteht man unter einer normalen Matrix?

(b) Zeigen Sie: Ist $A \in M_n(\mathbb{C})$ durch unitäre Matrizen diagonalisierbar, so gilt

$$A^*A = AA^*.$$

(c) Machen Sie sich klar, dass diese Eigenschaft erfüllt wird von orthogonalen Matrizen, von symmetrischen Matrizen, von unitären Matrizen und von hermiteschen Matrizen.

LÖSUNG:

a) Ein linearer Operator $f : V \to V$ heißt normal, wenn $f \circ f^* = f^* \circ f$. Eine Matrix A heißt normal, wenn $A^*A = AA^*$.

b) Diagonalisierbarkeit bedeutet, es gibt eine unitäre Matrix U, sodass $D := U^*AU$ eine Diagonalmatrix ist. Also ist

$$\begin{aligned} A &= UDU^{-1} = UDU^*, \\ A^* &= (U^*)^*\bar{D}U^* = U\bar{D}U, \\ AA^* &= UD\bar{D}U \\ &= U\bar{D}DU^* \\ &= A^*A. \end{aligned}$$

c) Für die aufgeführten Matrizen gilt nach Definition $A^* = A^t = A$ (symm. Matrizen), $A^* = A^t = A^{-1}$ (orth. Matrizen) und ebenso $A^* = A$ (hermitesche Matrizen) und $A^* = A^{-1}$ (unitäre Matrizen). Damit ergibt sich sofort, dass sie die gewünschte Eigenschaft haben, also normal sind.

(T 7)

Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum und A eine normale Matrix. Sei weiterhin $v \in V$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Beweisen Sie, dass v auch zu A^* ein Eigenvektor ist, der zugehörigem Eigenwert ist $\overline{\lambda}$.
(Hinweis: *Berechnen Sie die Norm von $A^*v - \overline{\lambda}v$*).

LÖSUNG:

Unter Verwendung der Eigenwertgleichung $Av = \lambda v$ berechnet man

$$\begin{aligned}
\|A^*v - \bar{\lambda}v\| &= \left\langle A^*v - \bar{\lambda}v, A^*v - \bar{\lambda}v\right\rangle \\
&= \langle A^*v, A^*v\rangle - \left\langle A^*v, \bar{\lambda}v\right\rangle - \left\langle \bar{\lambda}v, A^*v\right\rangle + \left\langle \bar{\lambda}v, \bar{\lambda}v\right\rangle \\
&= \langle v, AA^*v\rangle - \left\langle v, \bar{\lambda}Av\right\rangle - \left\langle \bar{\lambda}Av, v\right\rangle + |\lambda|^2 \langle v, v\rangle \\
&= \langle Av, Av\rangle - \left\langle v, |\lambda|^2 v\right\rangle - \left\langle |\lambda|^2 v, v\right\rangle + |\lambda|^2 \langle v, v\rangle \\
&= |\lambda|^2 \big(2\langle v, v\rangle - 2\langle v, v\rangle\big) = 0.
\end{aligned}$$

Da die Norm nicht ausgeartet ist, folgt $A^*v = \bar{\lambda}v$. Eben dies war zu zeigen.

(T 8) Spektralsatz für normale Operatoren

Sei V ein endlich dimensionaler komplexer Vektorraum mit einer positiv definiten hermiteschen Form $\langle\,,\,\rangle$. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass es zu jedem normalen lineare Operator auf V eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren gibt.

Sei also f ein normaler linearer Operator $f : V \to V$.

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von f und $v \in V$ ein dazugehöriger Eigenvektor. Zeigen Sie: Das orthogonale Komplement $(\mathbb{C}v)^\perp$ ist ein f-invarianter Teilraum.

(b) Zeigen Sie: V hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f.
(Hinweis: *Vollständige Induktion nach der Dimension*)

(c) Formulieren Sie den eben gezeigten Spektralsatz auch für normale Matrizen.

Lösung:

a) Da $\mathbb{C}v$ ein (eindimensionaler) Teilraum ist, ist $(\mathbb{C}v)^\perp$ ebenfalls ein Teilraum von V. Es sei $w \in (\mathbb{C}v)^\perp$. Dann gilt

$$\langle v, f(w)\rangle = \langle f^*(v), w\rangle = \left\langle \bar{\lambda}v, w\right\rangle = 0,$$

da f normal ist, vgl. Aufgabe (T 7).

b) Die Induktionsverankerung ist klar ($v/\|v\|$ ist normiert).
Der Induktionsschritt ergibt aus Teil a). Man schreibe $W = (\mathbb{C}v)^\perp$. Es gilt $V = W \oplus \mathbb{C}v$. Nun schränkt man das Skalarprodukt auf auf W ein. Der auf W eingeschränkte lineare Operator f ist normal bezüglich des eingeschränkten Skalarproduktes. Per Induktionsvoraussetzung hat W eine Orthonormalbasis $\{e_2, \ldots, e_n\}$ von Eigenvektoren zu f. Nimmt man nun $e_1 := v/\|v\|$ hinzu, so gibt dies eine Basis der gewünschten Art für V.

c) Matrixversion des Spektralsatzes:
Zu jeder normalen Matrix A existiert eine unitäre Matrix U, sodass U^*AU eine (komplexe) Diagonalmatrix ist.

(T 9) Simultane Diagonalisierung

Sei $\big(V, \langle\,,\,\rangle\big)$ ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum. Seien $f_1, \ldots, f_m$ normale lineare Operatoren auf V, die paarweise miteinander vertauschbar sind, d.h. $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ für jedes i und jedes j aus $\{1, \ldots, m\}$.

Es soll folgender Satz bewiesen werden: Es gibt eine Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ von V aus *simultanen Eigenvektoren*, d.h. es es gibt komplexe Zahlen λ_{ij} für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$, so dass gilt

$$f_i(e_j) = \lambda_{ij} e_j,$$

für jedes i und j.

(a) Sei λ ein Eigenwert zu f_1 und

$$V_\lambda(f_1) = \{v \in V;\ f_1(v) = \lambda v\}$$

der zugehörige Eigenraum. Zeigen Sie zunächst, dass

$$f_i\left(V_\lambda(f_1)\right) \subseteq V_\lambda(f_1).$$

(b) Es seien λ und μ zwei unterschiedliche Eigenwerte zu f_1. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenräume aufeinander senkrecht stehen.

(c) Nun beweisen Sie die Existenz einer Basis von V mit den gewünschten Eigenschaften. (Hinweis: *Induktion*)

LÖSUNG:

a) Sei $v \in V_\lambda(f_1)$. Da $f_i \circ f_1 = f_1 \circ f_i$, hat man

$$f_1\big(f_i v\big) = f_i\big(f_1 v\big) = \lambda f_i v,$$

also ist $f_i v$ Eigenvektor von f_1 zum Eigenwert λ.

b) Seien λ und μ unterschiedliche Eigenvektoren von f_1. Seien nun $v \in V_\lambda(f_1)$ und $w \in V_\mu(f_1)$ beliebig. Mit Hilfe von Aufgabe (T 7) erhält man aus der Normalität von f_1

$$\mu \langle v, w\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \langle v, fw\rangle = \langle f^* v, w\rangle = \left\langle \bar{\lambda} v, w\right\rangle = \lambda \langle v, w\rangle .$$

Da $\lambda \neq \mu$ ist dies nur möglich, wenn $\langle v, w\rangle = 0$.

c) Der Beweis wird durch Induktion nach m geführt. Die Beweisverankerung ist klar, denn für einen Operator ist nichts zu zeigen.

Der **Induktionsschritt** (von $m-1$ auf m) ergibt sich aus den Teilen a) und b): Nach a) erhalten die f_i für $i = 2, \ldots, m$ den Eigenraum $V_\lambda(f_1)$. Man kann diese Operatoren also auf $V_\lambda(f_1)$ einschränken. Die eingeschränkten Operatoren sind normal (bezüglich des auf $V_\lambda(f_1)$ eingeschränkten Skalarproduktes). Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Orthonormalbasis aus simultanen Eigenvektoren in $V_\lambda(f_1)$, die natürlich auch Eigenvektoren zu f_1 sind (zum Eigenwert λ).

Da die Eigenräume von f_1 zu anderen Eigenwerten senkrecht auf $V_\lambda(f_1)$ stehen, nach b), erhalten wir insgesamt eine Orthonormalbasis von V mit den gewünschten Eigenschaften.

(T 10) Diagonalisierung von Matrizen endlicher Ordnung

Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine Matrix mit der Eigenschaft $A^m = E$ für eine natürliche Zahl m (Man sagt dann A ist von *endlicher Ordnung*).

(a) Sei $\langle\, ,\, \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Weiterhin sei

$$[v, w] = \sum_{j=1}^{m} \left\langle A^j v, A^j w\right\rangle \quad \text{für } v, w \in \mathbb{C}^n.$$

Beweisen Sie, dass $[\, ,\,]$ ein hermitesches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie: A ist diagonalisierbar.
(Hinweis: Weisen Sie nach, dass A unitär bezüglich $[\, ,\,]$ ist.)

LÖSUNG:

a) Dass $[\,,\,]$ hermitsch ist folgt, da die Abbildung $v \mapsto Av$ linear und $\langle\,,\,\rangle$ hermitesch ist. Symmetrie und positive Definitheit folgen ebenso aus den entsprechenden Eigenschaften von $\langle\,,\,\rangle$.

b) Da $A^m = E$, gilt

$$\langle Av, Aw\rangle = \sum_{j=1}^{m} \left\langle A^{j+1}v, A^{j+1}w\right\rangle = \sum_{j=1}^{m-1} \left\langle A^{j+1}v, A^{j+1}w\right\rangle + \langle A^m Av, A^m Aw\rangle =$$

$$= \sum_{j=2}^{m} \left\langle A^{j}v, A^{j}w\right\rangle + \langle Av, Aw\rangle = [Av, Aw].$$

Also ist A unitär bezüglich $[\,,\,]$. Damit folgt die Diagonalisierbarkeit von A aus dem Spektralsatz für unitäre Matrizen.