Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008

Lineare Algebra II

13. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 55) Quadriken

Es seien q_A, q_B, q_C, q_D und q_E die zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

assoziierten quadratischen Formen. Geben Sie jeweils die Signatur an und skizzieren Sie die Kennlinien $\{\vec{x} \mid q_A(\vec{x}) = 1\}$, $\{\vec{x} \mid q_B(\vec{x}) = 1\}$, $\{\vec{x} \mid q_C(\vec{x}) = 1\}$, $\{\vec{x} \mid q_D(\vec{x}) = 1\}$ und $\{\vec{x} \mid q_E(\vec{x}) = 1\}$.

Lösung:

Die Signaturen lassen sich direkt an den Matrizen ablesen. Die signaturen sind $(2,0)$, $(1,1)$, $(3,0)$, $(2,1)$ und $(1,2)$.

Die erste Kennline ist eine Ellipse mit den Hauptachsen $\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1$ und $\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_2$. Die zweite Kennline besteht aus den Hyperbeln $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+y^2}$. Die dritte Kennline ist ein Ellipsoid mit den Hauptachsen $\vec{e}_1$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2$ und $\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3$. Die vierte Kennline ist ein einschaliges Hyperboloid. Die fünfte Kennline ist ein zweischaliges Hyperboloid.

(T 56) Symmetrischer Gaußalgorithmus

Berechnen Sie die Signatur der zu den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \\ -2 & 6 & 16 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

assoziierten quadratischen Formen und beschreiben Sie die Kennlinien.

Lösung:

Man kann den symmetrischen Gaußalgorithmus verwenden: Zu A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Signatur ist somit $(2,0)$, d.h. die Kennlinie ist eine Ellipse.

Zu B:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Die Signatur ist somit $(1, 1)$, d.h. die Kennlinie besteht aus zwei Hyperbeln. Zu C:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \\ -2 & 6 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Signatur ist somit $(3, 0)$, d.h. die Kennlinie ist eine Ellipsoid.

Zu D:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Die Signatur ist somit $(2, 1)$, d.h. die Kennlinie ist ein Hyperboloid.

(T 57) Wiederholung

Wiederholen Sie Aufgabe T34 oder G44.

(T 58) Raumzeit

In der Raumzeit ($\mathbb{R}^4$) wird der folgende 'Abstand' benutzt:

$$s(t, x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2}$$

(a) Ein Punkt in der Raumzeit kann von einem Lichtstrahl, der im Ursprung $(0, 0, 0, 0)$ startet, genau dann erreicht werden, wenn dessen Abstand zum Ursprung Null ist. Wie sieht die Menge aller solcher Punkte geometrisch aus? Welche geometrische Form hat die Menge aller Punkte, die von einem solchen Lichtstrahl zur Zeit 1 erreicht werden kann?

(b) Die relativistische Energie E eines Teilchens ist durch die Gleichung

$$E^2 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)c^2 + m_0^2c^4.$$

gegeben. Hierbei sind p_1, p_2, p_3 die drei Komponenten des Impulses, m_0 die Ruhemasse und c die Lichtgeschwindigkeit. Angenommen die Ruhemasse sei konstant und größer als 0. Wie sieht die Menge aller möglichen Konfigurationen für (E, p_1, p_2, p_3) aus?

(c) Ersetze die drei Impulskomponenten p_1, p_2, p_3 möglichst sinnvoll durch eine Komponente $r(p_1, p_2, p_3)$. Wie sieht die Menge aller möglichen Konfigurationen für (E, r) aus?

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = s &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2} \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2t^2 \\ \Leftrightarrow \quad c^2t^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \Leftrightarrow \quad c|t| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned}$$

Daher ist die Menge K der Punkte, die von dem Lichtstrahl erreicht werden kann, ein vierdimensionaler Kegel.

Die Menge S der Punkte die ein Lichtstrahl zum Zeitpunkt eins erreichen kann sind alle Punkte $(t, x_1, x_2, x_3)^T$ aus K mit $t = 1$ also gerade der Schnitt des Kegels K mit der Ebene $E = \{(t, x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^4 \mid t = 1\}$. Folgich ist S eine Kugeloberfläche mit Radius c.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} E^2 &= (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)c^2 + m_0^2 c^4 \\ \Leftrightarrow \quad E^2 - c^2 p_1^2 - c^2 p_2^2 - c^2 p_3^2 &= m_0^2 c^4. \end{aligned}$$

Daher ist die Menger der möglichen Konfigurationen ein vierdimensionales Hyperboloid.

(c) Setze $r := \sqrt{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)c^2}$. Dann ist die Menge der möglichen Konfigurationen für (E, r) eine Hyperbel.

(T 59)

Von welchem Flächentyp ist die Quadrik $x^T Ax + b^T x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{3}{2}\,?$$

LÖSUNG:

Die Matrix A hat die Eigenwerte 2, 4 und -2 mit den normierten Eigenvektoren $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$ und $e_3 = (0,0,1)^T$. Sei $C = (e_1, e_2, e_3)$ und $d = C^T b = (0,4,2)^T$. In den neuen Koordinaten y_1, y_2, y_3 bezüglich der Basis e_1, e_2, e_3 lautet die Gleichung dann:

$$2y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2 + 4y_2 + 2y_3 + \frac{3}{2} = 0.$$

Mit Hilfe zweier quadratischer Ergänzungen erhält man:

$$2y_1^2 + 4\left(y_2^2 + y_2 + \frac{1}{4}\right) - 1 - 2\left(y_3^2 - y_3 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2y_1^2 + 4\left(y_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(y_3 - \frac{1}{2}\right) + 1$$

Führt man neue Koordinaten $z_1 := y_1$, $z_2 := y_2 + \frac{1}{2}$ und $z_3 := y_3 - \frac{1}{2}$ ein, ergibt sich die neue Gleichung

$$2z_1^2 + 4z_2^2 - 2z_3^2 = -1,$$

aus der sich ablesen läßt, daß es sich bei der Lösungsmenge um ein *zweischaliges Hyperboloid* handelt.

(T 60)

Von welchem Flächentyp ist die Quadrik $x^T Ax + b^T x + c = 0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 + 6\sqrt{2} \\ 2 + 6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = 20\,?$$

LÖSUNG:

Die Matrix A hat die Eigenwerte 3, 2 und 1 mit den normierten Eigenvektoren $e_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$ und $e_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$. Sei $C = (e_1, e_2, e_3)$ und $d = C^T b = (0, 12, -4)^T$. In den neuen Koordinaten y_1, y_2, y_3 bezüglich der Basis e_1, e_2, e_3 lautet die Gleichung dann:

$$3y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 + 12y_2 - 4y_3 + 20 = 0.$$

Mit Hilfe zweier quadratischer Ergänzungen erhält man:

$$3y_1^2 + 2(y_2^2 + 6y_2 + 9) - 18 + (y_3^2 - 4y_3 + 4) - 4 + 20 = 3y_1^2 + 2(y_2 + 3)^2 + (y_3 - 2)^2 + -2$$

Führt man neue Koordinaten $z_1 := y_1$, $z_2 := y_2 + 3$ und $z_3 := y_3 - 2$ ein, ergibt sich die neue Gleichung

$$3z_1^2 + 2z_2^2 + z_3^2 = 2$$

bzw.

$$\frac{3}{2}z_1^2 + z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 = 1,$$

aus der sich ablesen läßt, daß es sich bei der Lösungsmenge um ein *Ellipsoid* mit den Halbachsen der Länge $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 1 und $\sqrt{2}$ handelt.