Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 23. Juni 2008

Lineare Algebra II

12. Tutorium

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ einen Körper (mit Charakteristik $\neq 2$) und (V,q) einen n-dimensionalen quadratischen Raum über $\mathbb{K}$.

(T 51)

Es sei (V,q) ein n-dimensionaler quadratischer Raum über $\mathbb{K}$, und q sei nicht ausgeartet. Weiter sei U ein Teilraum und q_U die Einschränkung von q auf U.
Zeigen Sie: Genau dann ist q_U nicht ausgeartet, wenn sich jede Orthogonalbasis von (U,q_U) zu einer Orthogonalbasis von (V,q) fortsetzen lässt.

(T 52)

Sei q eine nicht ausgeartete quadratische Form auf einem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie: Ist q isotrop, dann stellt q jedes Element aus $\mathbb{K}$ dar, d.h. zu jedem $a \in \mathbb{K}$ gibt es $x \in V$ mit $q(x) = a$.

(T 53)

Sei (V,q) nicht ausgeartet und $U \subset V$ ein total isotroper Teilraum von V. Weisen Sie nach, dass es einen total isotropen Teilraum U' gibt, so dass

1. $\dim U = \dim U'$
2. $V = U \oplus U' \oplus W$,

mit einem geeigneten Unterraum W, auf dem q_W nicht ausgeartet ist.

(T 54)

Sei (V,q) nicht ausgeartet. Zeigen Sie: Alle maximalen total isotropen Teilräume von V haben die gleiche Dimension m.
(Man bezeichnet m als den *Witt-Rang* von (V,q).)