Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 26. Juni 2008

Lineare Algebra II

12. Tutorium mit Lösungshinweisen

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ einen Körper (mit Charakteristik $\neq 2$) und (V, q) einen n-dimensionalen quadratischen Raum über $\mathbb{K}$.

(T 51)

Es sei (V, q) ein n-dimensionaler quadratischer Raum über $\mathbb{K}$, und q sei nicht ausgeartet. Weiter sei U ein Teilraum und q_U die Einschränkung von q auf U.
Zeigen Sie: Genau dann ist q_U nicht ausgeartet, wenn sich jede Orthogonalbasis von (U, q_U) zu einer Orthogonalbasis von (V, q) fortsetzen lässt.

LÖSUNG:

$\Rightarrow$ Ist q_U auf U nicht ausgeartet, so gilt $V = U \oplus U^\perp$ und $q_{U^\perp}$ ist ebenfalls nicht ausgeartet. Ist dann $\mathcal{C}$ eine Orthogonalbasis von U und $\mathcal{D}$ eine Orthogonalbasis von $U^\perp$, so ist $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ eine Orthogonalbasis von V.

$\Leftarrow$ (durch Widerspruch) **Annahme:** q_U ist ausgeartet. Demnach gibt es eine $u_1 \in U$ mit $b_{q_U}(u, w) = 0$ für alle $w \in U$. Ergänzt man nun u_1 zu einer Orthogonalbasis $u_1, \ldots, u_k$ ($k = \dim U$) von U (etwa indem man u_2 beliebig wählt und u_{m+1}, für $m = 2, \ldots, k$ jeweils zu u_j, $j = 2, \ldots, m$ orthogonal wählt), so gibt es nach Voraussetzung eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von V mit $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_k, f_1, \ldots, f_{n-k}\}$ mit $f_i \in U^\perp$. Folglich gilt für jedes $v \in V$

$$b_q(u_1, v) = b_q\left(u_1, \sum_{i=1}^{k} c_i u_i + \sum_{j=1}^{n-k} d_i f_I\right) = \underbrace{b_q\left(u_1, \sum_{i=1}^{k} c_i u_i\right)}_{=0 \text{ nach Vor.}} + \underbrace{b_q\left(u_1, \sum_{j=1}^{n-k} d_i f_i\right)}_{=0 \text{ da } \perp U} = 0.$$

Damit ist also q ausgeartet (auf V). *Widerspruch!*

Bemerkung: Man den Widerspruch auch schneller bekommen: Aus der Existenz der OB $\mathcal{B}$ von V folgt unmittelbar $V = U \oplus U^\perp$. Dann gilt aber q_U ist nicht ausgeartet (aus der Vorlesung bekannt).

(T 52)

Sei q eine nicht ausgeartete quadratische Form auf einem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie: Ist q isotrop, dann stellt q jedes Element aus $\mathbb{K}$ dar, d.h. zu jedem $a \in \mathbb{K}$ gibt es $x \in V$ mit $q(x) = a$.

LÖSUNG:

Ist $n = 2$, dann ist (V, q) eine hyperbolische Ebene und man kann eine Basis u, v von V wählen mit $q(u) = q(v) = 0$ und $b_q(u, v) = 1$. Für einen Vektor $bu + cv \in V$ (b,$c \in \mathbb{K}$) gilt dann

$$q(bu + cv) = b_q(bu + cv, bu + cv) = \underbrace{b_q(bu, bu)}_{=0} + 2b_q(bu, cv) + \underbrace{b_q(cv, cv)}_{=0} = bc.$$

Es ist klar, dass man nun jedes Element $a \in \mathbb{K}$ durch q darstellen kann. (Man wähle z.B. $x = au + v$.)

Sei nun $n > 2$. Da (V, q) isotrop ist, lässt sich von V eine hyperbolische Ebene H abspalten,

$$V = H \perp W.$$

Nun stellt aber bereits q_H jedes Element von $\mathbb{K}$ da, also auch q. (Wähle etwa $x \in H$ mit $q_H(x) = a = q(x)$).

(T 53)

Sei (V, q) nicht ausgeartet und $U \subset V$ ein total isotroper Teilraum von V. Weisen Sie nach, dass es einen total isotropen Teilraum U' gibt, so dass

1. $\dim U = \dim U'$
2. $V = U \oplus U' \oplus W$,

mit einem geeigneten Teilraum W, auf dem q_W nicht ausgeartet ist.

LÖSUNG:

Sei $r = \dim U$. Wir konstruieren induktiv eine Basis für den Teilraum U'.

Setze $U_1 := U$. Betrachte ein $0 \neq u_1 \in U_1$. Da q nicht ausgeartet auf V ist, gibt es $v_1' \in V$ mit $b_q(u_1, v_1') \neq 0$. Man kann annehmen, dass $b_q(u_1, v_1') = 1$ (nach eventuellem Umskalieren). Setze nun $v_1 := v_1' - q(v_1)b_q(u_1, v_1)$. Dann ist v_1 isotrop und spannt zusammen mit u_1 eine hyperbolische Ebene H_1 auf. Diese spaltet man nun orthogonal von V ab:

$$V = H_1 \oplus H_1^\perp = H_1 \oplus W_1 \qquad \left(W_1 := H_1^\perp\right).$$

(Man beachte, dass $q\,|_{W_1}$ nicht ausgeartet ist auf W_1.)

Betrachte nun $U_2 := U_1 \cap u_1^\perp \cap v_1^\perp = U \cap v_1^\perp$. Dies ist ein total isotroper Teilraum der Dimension $r-1$ und offenbar gilt $U_2 \perp H_1$, also $U_2 \subseteq W_1$. Wähle nun ein $u_2 \in U_2$. Da $q\,|_{W_1}$ nicht ausgeartet, findet man wieder ein $v_2 \in W_1$, mit $b_q(u_2, v_2) = 1$ und v_2 isotrop. Spalte nun die hyperbolische Ebene $H_2 := \mathrm{lin}\{u_2, v_2\}$ orthogonal von W_1 ab.

$$W_1 = H_2 \oplus W_2, \qquad \text{also } V = H_1 \oplus H_2 \oplus W_2,$$

wobei W_2 das orthogonale Komplement von H_2 in W_1 (bezüglich $q\,|_{W_1}$), bzw. $\left(H_1 \oplus H_2\right)^\perp$ in V (bezüglich q) ist. Außerdem ist $q\,|_{W_2}$ nicht ausgeartet.

Diese Vorgehen kann nun wiederholen und sukzessive hyperbolische Ebenen abspalten. Da dabei $U_i = U_{i-1} \cap u_{i-1}^\perp \cap v_{i-1}^\perp$ in W_{i-1} bzw.

$$U_i = U_1 \cap u_1^\perp \cap v_1^\perp \cap \cdots \cap u_{i-1}^\perp \cap v_{i-1}^\perp \quad \text{in } V,$$

jeweils ein total isotroper Teilraum der Dimension $r - i + 1$ ist, ist nach r Schritten Schluss (da $\dim U_{r+1} = 0$). Man erhält eine Zerlegung

$$V = \underbrace{H_1 \oplus \cdots \oplus H_r}_{\mathrm{lin}\{u_1, v_1, \ldots, u_r, v_r\}} \oplus W_r.$$

Offenbar bildet die orthogonale Summe hyperbolischer Ebenen einen Teilraum der Dimension $2r$. Die Menge $\{u_1, v_1, \ldots, u_r, v_r\}$ ist eine Basis dieses Teilraums (sie besteht aus genau $2r$ Vektoren), insbesondere ist sie linear unabhänig. Per Konstruktion sind die v_i isotrop, zueinander orthogonal und $\notin U$, sie spannen also einen total isotropen Teilraum U' der Dimension r auf, mit $U \cap U' = \emptyset$. Da außerdem $W_r \cap U = 0$ folgt, dass $u_1, \ldots, u_r$ den Teilraum U aufspannen und

$$V = (U \oplus U') \oplus W_r \qquad \text{mit} \quad q\,|_{W_r} \quad \text{nicht ausgeartet.}$$

Anmerkung: Man kann die lineare Unabhänigkeit der u_i und damit die Basiseigenschaft auch direkt prüfen: Denn aus

$$u_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} c_i u_i \qquad \text{folgt}$$

$$b_q(u_j, v_j) = \sum_{i<j} c_i b_q\big(u_i, \underbrace{v_j}_{\in H_i^\perp}\big) + \sum_{i>j} c_i b_q\big(\underbrace{u_i}_{\in U \cap v_j^\perp}, v_j\big) \quad = 0,$$

im Widerspruch zur Konstruktion.

(T 54)

Sei (V, q) nicht ausgeartet. Zeigen Sie: Alle maximalen total isotropen Teilräume von V haben die gleiche Dimension m.
(Man bezeichnet m als den *Witt-Rang* von (V, q).)

LÖSUNG:

Ist (V, q) isotrop, so kann man von V eine hyperbolische Ebene abspalten, $V = H_1 \oplus W$. Ist (W, q_W) immer noch isotrop, so lässt sich dieser Vorgang wiederholen. Bezeichne mit m die maximale Anzahl von hyperbolischen Ebenen, die man von V abspalten kann, so dass

$$V = H_1 \perp \cdots \perp H_m \perp W,$$

mit einem anisotropen Teilraum W. Wir zeigen: Ist U ein maximaler total isotroper Teilraum, so ist $\dim U = m$.

Ist U ein maximaler total isotroper Teilraum, so kann man wie in Aufgabe (T 53) einen zweiten total isotropen Teilraum U' der selben Dimension konstruieren, so dass $U \oplus U'$ eine Summe von $\dim U$ hyperbolischen Ebenen ist und $V = U \oplus U' \oplus W$.

Annahme: $\dim U < m$. Es folgt, dass man von V eine weitere (nicht in $U \oplus U'$ gelegene) hyperbolische Ebene H abspalten kann. Ist h_1, h_2 eine hyperbolische Basis von H, so ist $U \cup (\mathbb{K} h_1)$ ein total isotroper Raum von größerer Dimension als U. U war also nicht maximal. *Widerspruch!*