Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 16. Juni 2008

Lineare Algebra II

11. Tutorium

Im folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ einen Körper (mit Charakteristik $\neq 2$).

(T 47)

Seien (V, q) und (V, q') isomorphe quadratische Räume über $\mathbb{K}$, d.h. es gibt eine Isometrie s zwischen (V, q) und (V', q'). Weiter seien β_q und $\beta_{q'}$ die zu q respektive q' gehörigen Bilinearformen auf V bzw. V'. Zeigen Sie:

$$\beta_q(v, w) = \beta_{q'}\big(s(v), s(w)\big), \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

(T 48)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und q eine quadratische Form auf V und β_q die zugehörige Bilinearform. Zu dieser Bilinearform sei $V^\perp$ wie üblich definiert und W ein Komplementärraum zu $V^\perp$ in V, d.h. $V = V^\perp + W$, $V^\perp \cap W = \{0\}$.

(a) Zeigen Sie: Die Einschränkung q_W von q auf W ist eine nicht ausgeartete quadratische Form auf W. Für einen beliebigen Vektor $v \in V$, $v = u + w$, $u \in V^\perp$ und $w \in W$ gilt

$$q(v) = q_W(w).$$

(b) Ist W' ein weiterer Komplementärraum von $V^\perp$ in V, so gibt es eine Äquivalenz zwischen den quadratischen Formen q_W und $q_{W'}$, $q_W \simeq q_{W'}$.

(T 49)

(a) Seine (V, q) und (V', q) endlichdimensionale quadratische Räume über $\mathbb{K}$ und $s : V \to V'$ ein Vektorraumisomorphismus. Weiter seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von V und V' und A, A' die Strukturmatrizen von q, q' sowie S die darstellende Matrix von s bezüglich dieser Basen. Zeigen Sie: Genau dann ist s eine Isometrie, wenn

$$A = S^t A' S$$

gilt.

(b) Sei $[a_1, \ldots, a_n]$ eine Diagonalform, weiter seien $c_1, \ldots, c_n$ beliebige Elemente aus $\mathbb{K}^\times$. ($\mathbb{K}^\times$ ist die multiplikative Gruppe von $\mathbb{K}$, also $\{a \in \mathbb{K};\ \exists a^{-1} \in K\}$.) Dann gilt die Relation:

$$[c_1^2 a_1, \ldots, c_n^2 a_n] \simeq [a_1, \ldots, a_n].$$

(T 50)

Seien (V, q) und (V', q') endlichdimensionale quadratische Räume über $\mathbb{K}$.

(a) Sei $s : V \to V'$ eine lineare Abbildung (es wird nicht voraussgetzt, dass s bijektiv ist) für welche $q(v) = q'\big(s(v)\big)$ für jedes $v \in V$ gilt. Zeigen Sie: Ist q nicht ausgeartet, so ist s schon injektiv.

(b) Sei $s : V \to V'$ irgendeine (nicht als *linear* vorausgesetzte) Abbildung für die $\beta_q(v, w) = \beta_{q'}\big(s(v), s(w)\big)$ für jedes $v,\ w \in V$ gilt. Weiterhin sei q' nicht ausgeartet. Zeigen Sie: Enthält das Bild sV eine Basis von V', so ist s notwendig schon linear.