Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 20. Juni 2008

Lineare Algebra II

11. Tutorium mit Lösungshinweisen

Im folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ einen Körper (mit Charakteristik $\neq 2$).

(T 47)

Seien (V, q) und (V, q') isomorphe quadratische Räume über $\mathbb{K}$, d.h. es gibt eine Isometrie s zwischen (V, q) und (V', q'). Weiter seien β_q und $\beta_{q'}$ die zu q respektive q' gehörigen Bilinearformen auf V bzw. V'. Zeigen Sie:

$$\beta_q(v, w) = \beta_{q'}\big(s(v), s(w)\big), \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Lösung:

Es gilt

$$\beta_q(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w) = q'\big(s(v + w)\big) + q'\big(s(v)\big) + q'\big(s(w)\big),$$

weil s eine Isometrie ist. Da eine Isometrie auch ein Vektorraumisomorphismus, also linear, ist, gilt $s(v + w) = s(v) + s(w)$, also

$$\beta_q(v, w) = q'\big(s(v) + s(w)\big) + q'\big(s(v)\big) + q'\big(s(w)\big) = \beta_{q'}\big(s(v), s(w)\big).$$

(T 48)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und q eine quadratische Form auf V und β_q die zugehörige Bilinearform. Zu dieser Bilinearform sei $V^\perp$ wie üblich definiert und W ein Komplementärraum zu $V^\perp$ in V, d.h. $V = V^\perp + W$, $V^\perp \cap W = \{0\}$.

(a) Zeigen Sie: Die Einschränkung q_W von q auf W ist eine nicht ausgeartete quadratische Form auf W. Für einen beliebigen Vektor $v \in V$, $v = u + w$, $u \in V^\perp$ und $w \in W$ gilt

$$q(v) = q_W(w).$$

(b) Ist W' ein weiterer Komplementärraum von $V^\perp$ in V, so gibt es eine Äquivalenz zwischen den quadratischen Formen q_W und $q_{W'}$, $q_W \simeq q_{W'}$.

Lösung:

(a) q_W ist nicht ausgeartet: Gibt es nämlich ein w mit $\beta_q(w, w') = 0$ für jedes $w' \in W$ so gilt per Definition von $V^\perp$, dass $\beta_q(w, u') = 0$ für jedes $u \in V^\perp$ (β_q ist symmetrisch!). Da jedes $v \in V$ sich schreiben lässt als $v = u + w$, folgt daraus $w \in V^\perp$. Widerspruch!

Per Defininition von $V^\perp$ gilt nun

$$0 = \beta_q(w,u) = q(u+w) - q(w) - \underbrace{q(u)}_{=0,\ \text{da } u \in V^\perp}$$

also ist $q(v) = q(u+w)$ gleich $q(w) = q_W(w)$.

(b) Nach Voraussetzung gilt $V = W + V^\perp$ und $V = W' + V^\perp$. Jedes $v \in V$ lässt sich jeweils eindeutig schreiben als $v = w+u$, mit $w \in W$ und $u \in V^\perp$, bzw. als $v = w'+u'$, mit $w' \in W'$ und $u' \in V^\perp$. Es gibt damit einen Automorphismus $s : V \to V$, $v = w + u \mapsto w' + u'$ der auf $V^\perp$ eingeschränkt ein Basiswechsel ist und der W auf den isomorphen Teilraum W' abbildet. Es gilt $q(v) = q_W(w) = q_{W'}(w')$ (nach (a)) außerdem ist $q_{W'}(w') = q_{W'}\big(s\,|_W\,(w)\big)$. Also ist q_W äquivalent zu $q_{W'}$.

(T 49)

(a) Seine (V, q) und (V', q) endlichdimensionale quadratische Räume über $\mathbb{K}$ und $s : V \to V'$ ein Vektorraumisomorphismus. Weiter seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen von V und V' und A, A' die Strukturmatrizen von q, q' sowie S die darstellende Matrix von s bezüglich dieser Basen. Zeigen Sie: Genau dann ist s eine Isometrie, wenn

$$A = S^t A' S$$

gilt.

(b) Sei $[a_1, \dots, a_n]$ eine Diagonalform, weiter seien $c_1, \dots, c_n$ beliebige Elemente aus $\mathbb{K}^\times$. ($\mathbb{K}^\times$ ist die multiplikative Gruppe von $\mathbb{K}$, also $\{a \in \mathbb{K};\ \exists a^{-1} \in K\}$.) Dann gilt die Relation:

$$[c_1^2 a_1, \dots, c_n^2 a_n] \simeq [a_1, \dots, a_n].$$

Lösung:

(a) Dies folgt aus Aufgabe (G 36). Man bezeichne mit β_q und $\beta_{q'}$ die zu q und q' gehörigen Bilinearformen auf V bzw. V' und B sowie B' deren Strukturmatrizen. Da s ein Vektorraumisomorphismus ist, ist $s(\mathcal{B})$ eine Basis von V'. Nach (G 36) ist die Strukturmatrix von B' bezüglich dieser Basis dann gleich $S^t B' S$ und damit ist die von q' gleich $S^t A' S$ (denn $B' = 2A'$). Genau dann, wenn diese Matrix gleich A ist, hat man also $q(v) = q'(s(v))$. Also ist $A = S^t A' S$ äquivalent dazu, dass s eine Isometrie ist.

(b) Bezeichnet man mit C die Diagonalmatrix mit Einträgen $c_1, \dots, c_n$ und mit A und B die Strukturamtrizen der Diagonalformen $[a_1, \dots, a_n]$ und $[c_1^2 a_1, \dots, c_n^2 a_n]$, so gilt offenbar $C^t A C = B$. Hieraus folgt nach (a) die Behauptung, wenn C invertierbar ist, also einen Basiswechsel von $\mathbb{K}^n$ vermittelt. Da alle c_i, $i = 1, \dots, n$, aus $\mathbb{K}^\times$ sind, existiert $C^{-1} = diag\big(c_1^{-1}, \dots, c_n^{-1}\big)$.

(T 50)

Seien (V, q) und (V', q') endlichdimensionale quadratische Räume über $\mathbb{K}$.

(a) Sei $s : V \to V'$ eine lineare Abbildung (es wird nicht voraussgetzt, dass s bijektiv ist) für welche $q(v) = q'\big(s(v)\big)$ für jedes $v \in V$ gilt. Zeigen Sie: Ist q nicht ausgeartet, so ist s schon injektiv.

(b) Sei $s : V \to V'$ irgendeine (nicht als *linear* vorausgesetzte) Abbildung für die $\beta_q(v, w) = \beta_{q'}\big(s(v), s(w)\big)$ für jedes v, $w \in V$ gilt. Weiterhin sei q' nicht ausgeartet. Zeigen Sie: Enthält das Bild sV eine Basis von V', so ist s notwendig schon linear.

LÖSUNG:

(a) Da q nicht ausgeartet ist, ist auch die zugehörige Bilinearform β_q nicht ausgeartet. Außerdem gilt nach Voraussetzung und (T 47) $\beta_q(v,w) = \beta_{q'}(s(v), s(w))$.

Wir nehmen nun an s sei nicht injektiv. Dann gibt es $0 \neq v \in V$ mit $s(v) = 0$. Damit hat man aber $\beta_q(v,w) = \beta_{q'}(0, s(w)) = 0$ für jedes $w \in V$. Da β_q nicht ausgeartet ist, heißt dies v war doch 0. Widerspruch!

(b) Wir müssen zweigen, dass $s(av+bw) = as(v) + bs(w)$ für alle v, $w \in V$ und alle a, $b \in K$ gilt. Also $s(av+bw) - as(v) - bs(w) = 0$ in V'. Da q' und somit $\beta_{q'}$, die zugehörige Bilinearform, nicht ausgeartet sind, folgt dies, wenn

$$\beta_{q'}\big(s(av+bw) - as(v) - bs(w), u\big) = 0, \quad \text{für jedes} \quad u \in V'.$$

Es genügt offenbar, dies für eine Basis von V' nachzuprüfen. Sei $dimV' = m$. Nach Voraussetzung gibt es $b_1, \ldots, b_m \in V$, so dass $s(b_1), \ldots, s(b_m)$ eine Basis von V' ist. Für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ hat man

$$\begin{aligned}
&\beta_{q'}\big(s(av+bw) - as(v) - bs(w), s(b_i)\big) \\
&\qquad = \beta_{q'}\big(s(av+bw), s(b_i)\big) - a\beta_{q'}\big(s(v), s(b_i)\big) - b\beta_{q'}\big(s(w), s(b_i)\big) \\
&\qquad\qquad = \beta_q\big(av+bw, b_i\big) - a\beta_q\big(v, b_i\big) - b\beta_q\big(w, b_i\big) \\
&\qquad\qquad\qquad = \beta_q\big(av+bw-av-bw, b_i\big) = \beta_q\big(0, b_i\big) = 0.
\end{aligned}$$

Dabei wurden der Reihe nach die Bilinearität von $\beta_{q'}$, die Voraussetzung und die Bilinearität von β_q verwendet. Hieraus folgt die Behauptung.