Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008

Lineare Algebra II

10. Tutorium

(T 42) Symplektische Räume

Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ eine schiefsymmetrische nicht ausgeartete Bilinearform. Zeigen sie, daß die Dimension von V gerade sein muß.

(T 43) Zurückgezogene Formen

Es sei $\Psi : V \to W$ ein Homomorphismus zwischen endlichdimensionalen reellen Vektorräumen und $\omega : W \times W \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf W. Zeigen Sie, daß die *zurückgezogene Form*

$$\Psi^*\omega : V \times V \to \mathbb{R}, (v, v') \mapsto \omega(\Psi(v), \Psi(v'))$$

eine Bilinearform auf V ist.

Definition: Ein *linearer Symplektomorphismus* eines symplektischen Raumes (V, ω) ist ein Isomorphismsus $\Psi : V \xrightarrow{\cong} V$ mit der Eigenschaft $\Psi^*\omega = \omega$.

(T 44) Symplektische Räume

Zeigen Sie, daß die Symplektomorphismen eines Symplektischen Raumes eine Gruppe bilden.

Defintion Das *symplektische Komplement* W^ω eines Untervektorrraumes W eines symplektischen Raumes (V, ω) ist der Untervektorraum

$$W^\omega := \{v \in V \mid \forall w \in W : \omega(v, w) = 0\}.$$

Eine Untervektorraum W heißt *Lagrange-Untervektorrraum*, falls $W^\omega = W$ gilt.

(T 45) Symplektische Räume

Es sei ω_0 die symplektische Form auf $\mathbb{R}^{2n}$, welche bezüglich der kanonischen Basis durch die Gram-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Geben sie eine symplektische Basis und zwei verschiedene Lagrange-Untervektorräume L_1 und L_2 an. Können Sie Lagrange-Untervektorräume L_1 und L_2 finden, so daß $\mathbb{R}^{2n} = L_1 \oplus L_2$ gilt?

(T 46) Bilinearformen

Es seien β_1 und β_2 Bilinearformen auf dem endlichdimensionalen rellen Vektorraum V. Beweisen Sie:

(a) Ist β_1 nicht ausgeartet, so gilt $\det A \neq 0$ für jede Gram-Matrix A von β_1.

(b) Ist β_1 symmetrisch, so gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V bezüglich welcher die Gram-Matrix zu β_1 eine Diagonalmatrix ist.