Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008

Lineare Algebra II

10. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 42) Symplektische Räume

Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ eine schiefsymmetrische nicht ausgeartete Bilinearform. Zeigen sie, daß die Dimension von V gerade sein muß.

LÖSUNG:

Die Bilinearform ω ist eine **symplektische Form**. Somit gibt es eine symplektische Basis $u_1, \dots, u_n$, $v_1, \dots, v_n$ von V. Die Dimension von V ist somit $2n$ und daher gerade.

(T 43) Zurückgezogene Formen

Es sei $\Psi : V \to W$ ein Homomorphismus zwischen endlichdimensionalen reellen Vektorräumen und $\omega : W \times W \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf W. Zeigen Sie, daß die *zurückgezogene Form*

$$\Psi^*\omega : V \times V \to \mathbb{R}, (v, v') \mapsto \omega(\Psi(v), \Psi(v'))$$

eine Bilinearform auf V ist.

LÖSUNG:

Dies folgt aus der Linearität von Ψ und der Bilinearität von ω: Für Vektoren v_1, v_2, v_1', v_2' aus V und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\Psi^*\omega(\lambda v_1 + v_2, \mu v_1' + v_2') &= \omega(\Psi(\lambda v_1 + v_2), \Psi(\mu v_1' + v_2)) \\
&= \omega(\lambda\Psi(v_1) + \Psi(v_2), \mu\psi(v_1') + \Psi(v_2')) \quad \text{da } \Psi \text{ linear ist.} \\
&= \lambda\mu\omega(\Psi(v_1), \Psi(v_1')) + \lambda\omega(\Psi(v_1), \Psi(v_2')) \\
&\quad +\mu\omega(\Psi(v_2), \Psi(v_1')) + \omega(\Psi(v_2), \Psi(v_2')),
\end{aligned}$$

da ω bilinear ist. Somit ist $\Psi^*\omega$ eine bilinearform auf V.

Definition: Ein *linearer Symplektomorphismus* eines symplektischen Raumes (V, ω) ist ein Isomorphismsus $\Psi : V \xrightarrow{\cong} V$ mit der Eigenschaft $\Psi^*\omega = \omega$.

(T 44) Symplektische Räume

Zeigen Sie, daß die Symplektomorphismen eines Symplektischen Raumes eine Gruppe bilden.

LÖSUNG:

Es sei $\mathbf{Symp}(V, \omega)$ die Menge aller Symplektomorphismen von V. Sind Ψ und Φ Symplektomorphismen von V so gilt

$$(\Psi \circ \Phi)^* \omega = (\Psi^* \Phi^*)\omega = \Psi^*(\Phi^* \omega) = \Psi^* \omega = \omega.$$

Somit ist die Verknüpfung zweier Symplektomorphismen wieder ein Symplektomorphismus. Für die Identitaät id_V gilt $\mathrm{id}_V^* \omega = \omega$, d.h. die Identitat id_V ist ein neutrales Element in $\mathbf{Symp}(V, \omega)$. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß das Inverse eines Symplektomorphismus Ψ wieder eine Symplektomorphismus ist. Ist ψ ein Symplektomorphismus und sind v, v' Vektoren aus V, so gilt

$$(\Psi^{-1})^* \omega(v, v') = \omega(\Psi^{-1}(v), \Psi^{-1}(v')) = \Psi^* \omega(\Psi^{-1}(v), \Psi^{-1}(v')) = \omega(\Psi\Psi^{-1}(v), \Psi\Psi^{-1}(v')) = \omega(v, v').$$

Somit ist Ψ^{-1} ein Symplektomorphismus und dieser ist das Inverse von Ψ in $\mathbf{Symp}(V, \omega)$. Die Menge $\mathbf{Symp}(V, \omega)$ ist somit eine Gruppe.

Defintion Das *symplektische Komplement* W^ω eines Untervektorrraumes W eines symplektischen Raumes (V, ω) ist der Untervektorraum

$$W^\omega := \{v \in V \mid \forall w \in W : \omega(v, w) = 0\}.$$

Eine Untervektorraum W heißt *Lagrange-Untervektorrraum*, falls $W^\omega = W$ gilt.

(T 45) Symplektische Räume

Es sei ω_0 die symplektische Form auf $\mathbb{R}^{2n}$, welche bezüglich der kanonischen Basis durch die Gram-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Geben sie eine symplektische Basis und zwei verschiedene Lagrange-Untervektorräume L_1 und L_2 an. Können Sie Lagrange-Untervektorräume L_1 und L_2 finden, so daß $\mathbb{R}^{2n} = L_! \oplus L_2$ gilt?

LÖSUNG:

Die standard-symplektische Basis besteht aus den Vektoren $e_1, \dots, e_n$ und $e_{n+1}, \dots, e_{2n}$ der Standardbasis des $\mathbb{R}^{2n}$. Die Untervektorräume $L_1 := \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ und $L_2 := \langle e_{n+1}, \dots, e_{2n} \rangle$ sind somit Lagrange-Untervektorräume und es gilt $\mathbb{R}^{2n} = L_1 \oplus L_2$.

(T 46) Bilinearformen

Es seien β_1 und β_2 Bilinearformen auf dem endlichdimensionalen rellen Vektorraum V. Beweisen Sie:

(a) Ist β_1 nicht ausgeartet, so gilt $\det A \neq 0$ für jede Gram-Matrix A von β_1.

(b) Ist β_1 symmetrisch, so gibt es eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V bezüglich welcher die Gram-Matrix zu β_1 eine Diagonalmatrix ist.

LÖSUNG:

(a) Dies wurde in Aufgabe T31 schon bewiesen.

(b) Ist β_1 symmetrisch, so ist die Gram Matrix A bezüglich einer beliebigen Basis $v_1', \dots, v_n'$ von V symmetrisch und damit diagonalisierbar. Es gibt somit eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V bezüglich welcher die Form β_1 durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.