Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 4.4.2008

Lineare Algebra II

1. Tutorium

(T 1)

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ mit einem positiv definiten Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $A : V \to V$ ein symmetrischer Operator mit verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Weitherhin sei

$$V_\lambda(A) = \{v \in V \; ; \; Av = \lambda v\}$$

der Eigenraum von A zum Eigenwert λ.

(a) Zeigen Sie, daß $V_\lambda(A)$ ein A-invarianter Unterraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, daß V die direkte Summe der Eigenräume ist, d.h.

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}.$$

(c) Es seien λ_i, λ_j zwei unterschiedliche Eigenwerte. Zeigen Sie, daß $\left\langle V_{\lambda_i}, V_{\lambda_j} \right\rangle = 0$.

(T 2)

Es sei $V = M_n(\mathbb{R})$ die Vektorraum der reellen $n \times n$ Matrizen, $S \subset V$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen. Weiterhin sei

$$\langle A, B \rangle = Spur(AB).$$

(a) Beweisen Sie, daß $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine nicht-ausgeartet Bilinearform ist (d.h. aus $\langle A, B \rangle = 0$ für alle $B \in V$ folgt $A = 0$.)

(b) Welche Dimension hat S?

(c) Zeigen Sie, daß $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf S ist.

(d) Es sei $W \subset S$ der Unterraum bestehend aus Matrizen mit Spur 0. Was ist die Dimension von W? Was ist die Dimension von $W^\perp$? (bezüglich dem Raums S und dem oben eingeführten Skalarprodukt).

(T 3)

Es seien V und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie in Aufgabe 2 und $D \subset V$ der Unterraum von Diagonalmatrizen. Beschreiben Sie den Raum $D^\perp$. Was ist die Dimension von $D^\perp$?

(T 4)

Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit einer positiv definiten Hermitischen Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(a) Es sei $A : V \to V$ ein Hermitischer Operator und $v \in V$ ein von Null verschiedener Eigenvektor von A. Für $w \in W$, zeigen Sie, daß wenn $w \perp v$ dann ist auch $Aw \perp v$.

(b) Zeigen Sie, daß wenn $W \subset V$ stabil unter A ist, d.h. $Aw \in W$ für jedes $w \in W$, dann ist $W^\perp$ auch stabil unter A.

(T 5)

Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit einer Sesquilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $V^* = \hom(V, \mathbb{R})$ der Dualraum zu V. Für jedes $v \in V$ sei $L_v : V \to \mathbb{C}$ durch

$$L_v(w) =< v, w >, w \in V$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, daß $L_v \in V^*$

(b) Zeigen Sie, daß $A : v \mapsto L_v$ ein lineare Abbildung: $V \to V^*$ ist.

(c) Zeigen Sie, daß $A : V \to V^*$ isomorph sind.