Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 4.4.2008

Lineare Algebra II

1. Tutorium mit Lösungshinweisen

(T 1)

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ mit einem positiv definiten Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $A : V \to V$ ein symmetrischer Operator mit verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Weitherhin sei

$$V_\lambda(A) = \{v \in V\ ;\ Av = \lambda v\}$$

der Eigenraum von A zum Eigenwert λ.

(a) Zeigen Sie, daß $V_\lambda(A)$ ein A-invarianter Unterraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, daß V die direkte Summe der Eigenräume ist, d.h.

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}.$$

(c) Es seien λ_i, λ_j zwei unterschiedliche Eigenwerte. Zeigen Sie, daß $\left\langle V_{\lambda_i}, V_{\lambda_j}\right\rangle = 0$.

LÖSUNG:

(a) Lassen Sie $v, w \in V_\lambda(A)$ dann gilt $Av = \lambda v$ und $Aw = \lambda w$. Es folgt dann das für beliebige $a, b \in \mathbb{K}$: $A(av + bw) = aAv + bAw = \lambda(av + bw)$ also $av + bw \in V_\lambda(A)$, damit ist $V_\lambda(A)$ ein lineares Unterraum von V. Wieder, lassen Sie $u = Av = \lambda v$ dann ist $Au = A\lambda v = \lambda Av = \lambda^2 v = \lambda u$ also ist $A(V_\lambda(A)) \subseteq V_\lambda(A)$.

(b) Lassen Sie y_i ein Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von A, wobei $Ay_i = \lambda_i y_i$. Dann gilt natürlich, daß jedes $v \in V$ eindeutig als $v = a_1 y_1 + \cdots + a_r y_r$ darstellbar ist. Ferner wissen wir das, weil $v_i = a_i y_i \in V_{\lambda_i}(A)$, also ist v als $v = v_1 + \cdots + v_r$ eindeutig darstellbar und $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$.

(c) Sei $\lambda_i \neq \lambda_j$, und $v_i \in V_{\lambda_i}(A), v_j \in V_{\lambda_j}(A)$. Dann ist $(Av_i, v_j) = \lambda_i(v_i, v_j)$ und $(v_i, Av_j) = \lambda_j(v_i, v_j)$ aber A ist symmetrisch, also $(Av_i, v_j) = (v_i, Av_j)$ und es folgt, daß $\lambda_i(v_i, v_j) = \lambda_j(v_i, v_j)$ und wenn $\lambda_i \neq \lambda_j$ ist das nur möglich, wenn $(v_i, v_j) = 0$.

(T 2)

Es sei $V = M_n(\mathbb{R})$ die Vektorraum der reellen $n \times n$ Matrizen, $S \subset V$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen. Weiterhin sei

$$\langle A, B\rangle = Spur(AB).$$

(a) Beweisen Sie, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine nicht-ausgeartet Bilinearform ist (d.h. aus $\langle A, B\rangle = 0$ für alle $B \in V$ folgt $A = 0$.)

(b) Welche Dimension hat S?

(c) Zeigen Sie, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf S ist.

(d) Es sei $W \subset S$ der Unterraum bestehend aus Matrizen mit Spur 0. Was ist die Dimension von W? Was ist die Dimension von $W^\perp$? (bezüglich dem Raums S und dem oben eingeführten Skalarprodukt).

LÖSUNG:

(a) Lassen Sie $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in V$. Dann gilt

$$\langle A, B\rangle = Spur(AB) = \Sigma_{k,l} a_{lk} b_{kl}.$$

Also, $\langle A + C, B\rangle = \Sigma_{k,l}(a_{lk} + c_{lk})b_{kl} = \Sigma_{k,l} a_{lk} b_{kl} + \Sigma_{k,l} c_{lk} b_{kl} = \langle A, B\rangle + \langle C, B\rangle$. Genauso folgt $\langle A, B + C\rangle = \langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle$.

Weiter, wann $\langle A, B\rangle = 0$ für jedes $B \in V$ gilt das naturlich auch für die Matrizen $B_{mn} = (b_ij)$ wobei $b_ij = \delta_{mi}\delta_{nj} = 1$ für $m = i$ und $n = j$ und sonst 0. Für diese Matrizen ist dann $\langle A, B_{mn}\rangle = \Sigma_{k,l} a_{lk} b_{kl} = a_{mn}$ und wenn $\langle A, B_{mn}\rangle = 0$, dann müss $a_{mn} = 0$. Also wenn $\langle A, B_{mn}\rangle = 0$ für jedes m, n dann müss $A = 0$ sein.

(b) Wenn $A \in S$, dann ist $a_{ij} = a_{ji}$ so wir können (z.B.) die obere rechte Dreick zusammen mit der Diagonale beliebig wählen. Die Dimension ist also gegebn durch $\Sigma_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(c) Wir haben $\langle A, A\rangle = \Sigma_{k,l} a_{lk} a_{kl} = \Sigma_{k,l} a_{kl}^2 \geq 0$ und $\langle A, A\rangle = 0$ nur, wenn $a_{kl} = 0$ für jede k, l, also wenn $A = 0$. Also $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ist ein positiv definites Skalarprodukt auf S.

(d) Weil die Dimension von S gleich $\frac{n(n+1)}{2}$ und die einzige Restriktion die lineare Gleichung $Spur = 0$ ist, ist dann die Dimension von W gleich $\frac{n(n+1)}{2} - 1$. Da das Skalarprodukt pos. definit auf S ist, gilt $S = W \oplus W^\perp$, also ist die Dimension von $W^\perp$ gleich 1.

(T 3)

Es seien V und $\langle \cdot, \cdot\rangle$ wie in Aufgabe 2 und $D \subset V$ der Unterraum von Diagonalmatrizen. Beschreiben Sie den Raum $D^\perp$. Was ist die Dimension von $D^\perp$?

LÖSUNG:

Wenn $A = (a_{ij}) \in V$ und $B = (d_i) \in D$, dann ist $\langle A, B\rangle = Spur(AB) = \Sigma a_{jj} d_j$, also wenn $\langle A, B\rangle = 0$ für jedes $B \in D$, dann müss jedes $a_{jj} = 0$, also $A \in D^\perp$ wenn und nur wenn jedes diagonale Element $a_{jj} = 0$. Die Dimension von $D^\perp$ is damit gleich $n^2 - n = n(n-1)$.

(T 4)

Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit einer positiv definiten Hermitischen Form $\langle \cdot, \cdot\rangle$.

(a) Es sei $A : V \to V$ ein Hermitischer Operator und $v \in V$ ein von Null verschiedener Eigenvektor von A. Für $w \in W$, zeigen Sie, daß wenn $w \perp v$ dann ist auch $Aw \perp v$.

(b) Zeigen Sie, daß wenn $W \subset V$ stabil unter A ist, d.h. $Aw \in W$ für jedes $w \in W$, dann ist $W^\perp$ auch stabil unter A.

LÖSUNG:

(a) Wenn $\langle w, v\rangle = 0$, dann ist $\langle Aw, v\rangle = \langle w, Av\rangle = \lambda \langle w, v\rangle = 0$.

(b) Sei $A(W) \subseteq W$. Dann gilt für $u \in W^\perp$ und $w \in W$ mit $Aw = w' \in W$, daß $\langle Au, w\rangle = \langle u, Aw\rangle = \langle u, w'\rangle = 0$ weil $u \in W^\perp$ und $w' \in W$. Also, $Au \in W^\perp$ und $W^\perp$ ist stabil unter A.

(T 5)

Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit einer Sesquilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $V^* = \hom(V, \mathbb{R})$ der Dualraum zu V. Für jedes $v \in V$ sei $L_v : V \to \mathbb{C}$ durch

$$L_v(w) =< v, w >, w \in V$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, daß $L_v \in V^*$

(b) Zeigen Sie, daß $A : v \mapsto L_v$ ein lineare Abbildung: $V \to V^*$ ist.

(c) Zeigen Sie, daß $A : V \to V^*$ isomorph sind.

LÖSUNG: (

a) Für $u, w \in V$ und $a, b \in \mathbb{C}$ haben wir

$$L_v(au + bw) = \langle v, au + bv \rangle = a \langle v, u \rangle + b \langle v, w \rangle = aL_v(u) + bL_v(w),$$

folglich $L_v \in V^*$.

(b) Für $v_1, v_2 \in V$ und $a, b \in \mathbb{C}$ haben wir

$$L_{av_1+bv_2}(w) = \langle av_1 + bv_2, w \rangle = a \langle v_1, w, + \rangle b \langle v_2, w \rangle = aL_{v_1}(w) + bL_{v_2}(w)$$

für jedes $w \in V$. Also $A : v \mapsto L_v$ ist eine lineare Abbildung von V in V^*.

(c) Wenn $L_v = 0$, dann ist $\langle v, w \rangle = 0$ für jedes $w \in V$ also muss $v = 0$ sein, weil das Skalarprodukt nicht-degeneriert ist. Also, der Kern von A ist gleich 0, also ist A injektiv, und A muss auch surjektive werden, weil $\dim V = \dim V^*$. Also ist $A : V \to V^*$ isomorph.