Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Bruinier

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 08 16. September 2008

Lineare Algebra II

für BSc. Mathe., BSc. WiMathe., LaGM

Bitte alle Blätter mit **Namen** und **Matrikelnummer** versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen.
Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Fachrichtung: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt	Bonus	Note
Erreichbar	8	10	10	10	10	10	10	10	78		
Erreicht											

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.*
- *Alle Blätter dürfen nur* **einseitig** *beschrieben werden.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!*
- *Als schriftliche Aufzeichnungen sind* **4 handschriftliche** *DIN A4*-**Seiten** *zugelassen. Diese sind zu nummerieren und mit dem* **Namen** *zu versehen.*
- *Sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie bitte **nur die richtigen** Aussagen an. Jedes richtig bearbeitete Kästchen gibt einen Punkt. Jedes falsch bearbeitete Kästchen gibt einen Punkt Abzug. Pro Teilaufgabe können Sie maximal 2 und minimal 0 Punkte erhalten.

(a) Es sei (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum über einem Körper K der Charakteristik 0. Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

- ☐ Ist f selbstadjungiert, so gilt $\beta_q(fv, fw) = \beta_q(v, w)$ für alle v, $w \in V$.
- ☐ Ist f selbstadjungiert, so gilt $\beta_q(fv, w) = \beta_q(v, fw)$ für alle v, $w \in V$.
- ☐ Ist f selbstadjungiert, so ist f invertierbar.
- ☐ Ist f selbstadjungiert, so ist f eine Isometrie.

(b) Es sei (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum über einem Körper K der Charakteristik 0. Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

- ☐ Ist f eine Isometrie, so ist f eine Spiegelung.
- ☐ Ist f eine Spiegelung, so ist f eine Isometrie.
- ☐ Ist f eine Isometrie, so lässt sich f als Produkt von Spiegelungen darstellen.
- ☐ Ist f eine Spiegelung, so ist f eine Involution.

(c) Es seien A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $AS = SB$.

- ☐ Es gilt $\det(AA^t) \geq 0$.
- ☐ Es gilt $\det(AA^t) > 0$.
- ☐ Es gilt $\det(A) = \det(B)$.
- ☐ Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(d) Sei V die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt. Welche der folgenden Matrizen beschreiben Elemente aus $\mathrm{SO}(V)$?

☐ $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. ☐ $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Satz über die Jordan-Zerlegung aus der Vorlesung.

(b) Formulieren Sie den Satz über die Jordansche Normalform aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Sei V eine endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Es sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und A die darstellende Matrix von f bezüglich $\mathcal{B}$. Wie lässt sich die adjungierte Abbildung f^* zu f bezüglich dieser Basis beschreiben?

(b) Sei (V, q) eine nicht ausgearteter reeller quadratischer Raum der Dimension n. Geben Sie (mit Nachweis) ein Element aus $\mathrm{O}(V, q)$ an, welches sich nicht als Produkt von weniger als n Spiegelungen schreiben lässt.

(c) Betrachten Sie folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie (mit Begründung) A^{2008} an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass es für jede lineare Abbildung $g : V \to \mathbb{R}$ einen eindeutig bestimmten Vektor $a \in V$ gibt, sodass

$$g(x) = \langle a, x \rangle$$

für alle $x \in V$.

(b) Benutzen Sie Aufgabe a) um zu zeigen, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutiges reelles Polynom $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ vom Grad höchstens n gibt, so dass

$$\int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx = q(0)$$

für jedes $q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

(c) Bestimmen Sie p explizit für $n = 1$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Sei V ein Vektorraum der Dimension n über einem Grundkörper K der Charakteristik 0. Weiter sei f ein nilpotenter Endomorphismus mit $f^n = 0$ sowie $f^{n-1} \neq 0$ und $v \in V$ ein Vektor mit $f^{n-1}(v) \neq 0$.

Zeigen Sie: $v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)$ bilden eine Basis von V.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 44 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Sei $\big(V, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ ein unitärer Vektorraum und $f : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Alle Eigenwerte von f sind reell.

(b) Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Seien $V = \mathbb{R}^3$ und $q : V \to \mathbb{R}$ die quadratische Form $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Es sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ die zu q assoziierte Bilinearform, so dass $q(x) = \frac{1}{2}\beta(x, x)$. Seien $u \in V$ ein isotroper Vektor und $v \in V$ mit $\beta(u, v) = 0$. Wir bezeichnen mit $E_{u,v} : V \to V$ die lineare Abbildung, welche durch

$$E_{u,v}(y) = y + \beta(y, u)\, v - \beta(y, v)\, u - \beta(y, u)\, q(v)\, u, \ y \in V$$

definiert ist (eine sogenannte Eichler-Transformation).

(a) Zeigen Sie, dass $E_{u,v}$ eine Isometrie von (V, q) ist.

(b) Zeigen Sie, dass $E_{u,v}(u) = u$.

(c) Zeigen Sie, dass $E_{u,v}(v) = v - 2q(v)\, u$.