Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Bruinier

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 08 16. September 2008

Lineare Algebra II

für BSc. Mathe., BSc. WiMathe., LaGM mit Lösungshinweisen

Bitte alle Blätter mit **Namen** und **Matrikelnummer** versehen, fortlaufend nummerieren und am Schluss in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen.
Alle Ergebnisse sind zu begründen. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Fachrichtung: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt	Bonus	Note
Erreichbar	8	10	10	10	10	10	10	10	78		
Erreicht											

- *Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.*
- *Alle Blätter dürfen nur* **einseitig** *beschrieben werden.*
- *Lösungsschritte und Teilergebnisse sind ausreichend zu begründen.*
- *Alle Ergebnisse/Sätze, die nicht Inhalt der Vorlesung waren, müssen begründet werden!*
- *Als schriftliche Aufzeichnungen sind* **4 handschriftliche** *DIN A4*-**Seiten** *zugelassen. Diese sind zu nummerieren und mit dem* **Namen** *zu versehen.*
- *Sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt.*
- *Mobiltelefone sind ausgeschaltet in einer Tasche zu verstauen.*
- **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie bitte **nur die richtigen** Aussagen an. Jedes richtig bearbeitete Kästchen gibt einen Punkt. Jedes falsch bearbeitete Kästchen gibt einen Punkt Abzug. Pro Teilaufgabe können Sie maximal 2 und minimal 0 Punkte erhalten.

(a) Es sei (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum über einem Körper K der Charakteristik 0. Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

- ☐ Ist f selbstadjungiert, so gilt $\beta_q(fv, fw) = \beta_q(v, w)$ für alle v, $w \in V$.
- ☐ Ist f selbstadjungiert, so gilt $\beta_q(fv, w) = \beta_q(v, fw)$ für alle v, $w \in V$.
- ☐ Ist f selbstadjungiert, so ist f invertierbar.
- ☐ Ist f selbstadjungiert, so ist f eine Isometrie.

(b) Es sei (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum über einem Körper K der Charakteristik 0. Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

- ☐ Ist f eine Isometrie, so ist f eine Spiegelung.
- ☐ Ist f eine Spiegelung, so ist f eine Isometrie.
- ☐ Ist f eine Isometrie, so lässt sich f als Produkt von Spiegelungen darstellen.
- ☐ Ist f eine Spiegelung, so ist f eine Involution.

(c) Es seien A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $AS = SB$.

- ☐ Es gilt $\det(AA^t) \geq 0$.
- ☐ Es gilt $\det(AA^t) > 0$.
- ☐ Es gilt $\det(A) = \det(B)$.
- ☐ Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(d) Sei V die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt. Welche der folgenden Matrizen beschreiben Elemente aus $\mathrm{SO}(V)$?

☐ $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. ☐ $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

LÖSUNG:

(a) Nur die zweite Aussage ist richtig.

(b) Die zweite, dritte und vierte Aussage sind richtig.

(c) Die erste und die dritte Aussage sind richtig.

(d) Die dritte und vierte Matrix. (Die erste Matrix beschreibt eine Spiegelung und hat $\det = -1$, die zweite erhält nicht das Skalarprodukt).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Satz über die Jordan-Zerlegung aus der Vorlesung.

(b) Formulieren Sie den Satz über die Jordansche Normalform aus der Vorlesung.

LÖSUNG:

(a) Der Satz über die Jordan-Zerlegung (§ 4, Satz 3) lautet:

Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und $P_f \in K[x]$ zerfalle in Linearfaktoren. Dann existiert eine Zerlegung

$$f = g + h, \quad g, h \in \mathrm{End}(V),$$

wobei g diagonalisierbar und h nilpotent sind, und $g \circ h = h \circ g$. Eine solche Zerlegung ist eindeutig und g, h sind Polynome in f.

(b) Der Satz über die Jordansche Normalform (§ 5, Satz 1) lautet:

Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus. Wenn $P_f \in K[x]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, so gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

in Jordanscher Normalform ist. Die Matrix A ist bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke eindeutig durch f bestimmt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Sei V eine endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus. Es sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und A die darstellende Matrix von f bezüglich $\mathcal{B}$. Wie lässt sich die adjungierte Abbildung f^* zu f bezüglich dieser Basis beschreiben?

(b) Sei (V, q) eine nicht ausgearteter reeller quadratischer Raum der Dimension n. Geben Sie (mit Nachweis) ein Element aus $\mathrm{O}(V, q)$ an, welches sich nicht als Produkt von weniger als n Spiegelungen schreiben lässt.

(c) Betrachten Sie folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie (mit Begründung) A^{2008} an.

LÖSUNG:

(a) Sei $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ die darstellende Matrix von f. Dann gilt

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f^*) = A^t.$$

(b) Die Abbildung $-id_V$ ist ein Beispiel der gesuchten Art, da sie über keinen Fixvektor $\neq 0$ verfügt und sich somit nicht als Produkt von weniger als n Spiegelungen darstellen lässt.

(c) Die Matrix A beschreibt einen Drehung um einen Winkel von $\frac{\pi}{3}$ (60 Grad) um die e_2-Achse sowie eine Streckung um einen Faktor 2 entlang dieser Achse.

Also beschreibt A^{2008} eine Drehung der e_1e_3-Ebene um $\frac{2008\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$ (da $2008 = 6 \cdot 334 + 4$) und eine Steckung um 2^{2008}. Also hat man

$$A^{2008} = \begin{pmatrix} \cos\frac{4\pi}{3} & 0 & -\sin\frac{4\pi}{3} \\ 0 & 2^{2008} & 0 \\ \sin\frac{4\pi}{3} & 0 & \cos\frac{4\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 2^{2008} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass es für jede lineare Abbildung $g: V \to \mathbb{R}$ einen eindeutig bestimmten Vektor $a \in V$ gibt, sodass

$$g(x) = \langle a, x\rangle$$

für alle $x \in V$.

(b) Benutzen Sie Aufgabe a) um zu zeigen, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutiges reelles Polynom $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ vom Grad höchstens n gibt, so dass

$$\int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx = q(0)$$

für jedes $q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

(c) Bestimmen Sie p explizit für $n = 1$.

LÖSUNG:

a) Seien $n = \dim V$ und $v_1, \dots, v_n$ ein Basis für V. Sei $g : V \to \mathbb{R}$ eine beliebige lineare Abbildung und sei $a_i = g(v_i)$. Für $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ gilt dann

$$g(x) = \sum_{i=1}^n x_i g(v_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i = \langle x, a \rangle$$

wobei $a = \sum_{i=1}^n a_i v_i$. b) Sei $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$ und $g : V \to \mathbb{R}$ die lineare Abbildung, die durch $g(p) = p(0)$ definiert ist.

Dann gibt es ein eindeutiges $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, so dass $g(q) = \langle q, p \rangle$ für jedes $q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, oder mit anderen Worten

$$g(q) = q(0) = \langle q, p \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx.$$

c) Für $n = 1$ gilt $q(x) = q_0 + q_1 x$ und $p(x) = p_0 + p_1 x$, also ist

$$q(0) = q_0$$

und

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx &= \int_0^1 (p_0 + p_1 x)(q_0 + q_1 x)\, dx \\ &= \int_0^1 p_0 q_0 + (p_1 q_0 + p_0 q_1)\, x + p_1 q_1 x^2 dx \\ &= p_0 q_0 + \frac{1}{2}(p_1 q_0 + p_0 q_1) + \frac{1}{3} p_1 q_1 \\ &= q_0 \left(p_0 + \frac{1}{2} p_1 \right) + q_1 \left(\frac{1}{2} p_0 + \frac{1}{3} p_1 \right). \end{aligned}$$

Weil $\langle p, q \rangle = q(0)$ muss $p_0 + \frac{1}{2} p_1 = 1$ und $\frac{1}{2} p_0 + \frac{1}{3} p_1 = 0$ gelten, also $p_0 = -\frac{2}{3} p_1$ und $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) p_1 = 1$ $\Rightarrow p_1 = -6$ und $p_0 = 4$. Das eindeutige p ist dann $p(x) = 4 - 6x$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Sei V ein Vektorraum der Dimension n über einem Grundkörper K der Charakteristik 0.
Weiter sei f ein nilpotenter Endomorphismus mit $f^n = 0$ sowie $f^{n-1} \neq 0$ und $v \in V$ ein Vektor mit $f^{n-1}(v) \neq 0$.

Zeigen Sie: $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ bilden eine Basis von V.

LÖSUNG:

(a) (indirekter Beweis) **Annahme:** Die Vektoren $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ sind linear abhängig, es gibt also Zahlen $c_0, \dots, c_{n-1} \in K$ nicht alle 0, sodass

$$0 = c_0 v + c_1 f(v) + \cdots + c_{n-1} f^{n-1}(v).$$

Wir führen dies nun induktiv auf den *Widerspruch* $c_0 = c_1 = \cdots c_{n-1} = 0$:

Wendet man nämlich f^{n-1} auf die rechte Seite dieser Gleichung an, so erhält man

$$0 = c_0 f^{n-1}(v) + 0,$$

da $f^{n-1} f^k(v) = 0$ für $k \geq 1$. Da $c_0 f^{n-1}(v) \neq 0$ folgt $c_0 = 0$. (Induktionsverankerung $i = 0$.)

Induktion $i-1 \to i$: Nach Voraussetzung ist $c_0 = \cdots = c_{i-1} = 0$. Durch Anwenden von f^{n-i-1} erhält man

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} c_j f^{n-i-1+j}(v) = 0 + c_i f^{n-1}(v) + 0,$$

und wieder folgt $c_i = 0$.

Somit bilden $v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)$ ein System von n linear unabhängigen Vektoren, mithin also eine Basis von V.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 44 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

A) Die Matrix A ist eine obere Dreiecksmatrix. Folglich stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen und sind 2,-4 und 44. Da sie paarweise verschieden sind, ist A diagonalisierbar und

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 44 \end{pmatrix}.$$

B) Die Matrix B ist reell und symmetrisch und daher diagonalisierbar. Für das charakteristische Polynom von B gilt

$$\chi_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda) + \lambda^2 (1-\lambda) = -(1-\lambda)^2 (\lambda + 1)$$

Folglich besitzt B die Eigenwerte 1 mit der algebraischen Vielfachheit zwei und -1 mit der algebraischen Vielfachheit eins. Daher ist

$$J_B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

eine Jordannormalform von B.

B) Für das charakteristische Polynom von C gilt

$$\begin{aligned} \chi_C(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 1 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) \\ &= (1-\lambda)(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i). \end{aligned}$$

Folglich besitzt C die verschiedenen Eigenwerte 1, $1-i$ und $1+i$ und

$$J_C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1-i & \\ & & 1+i \end{pmatrix}$$

ist eine Jordannormalform von C.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Sei $\left(V, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ ein unitärer Vektorraum und $f : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Alle Eigenwerte von f sind reell.

(b) Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

Lösung:

(a) Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ $(\in \mathbb{C})$. Da f selbstadjungiert ist, gilt

$$\lambda\|v\|^2 = \lambda \langle v, v\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \langle v, fv\rangle = \langle fv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \bar{\lambda}\|v\|^2.$$

Es folgt $\lambda = \bar{\lambda}$ also ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Seien λ, μ verschiedene Eigenwerte von f sowie $v \in V_\lambda(f)$, $w \in V_\mu(f)$ jeweils beliebige Vektoren aus den jeweiligen Eigenräumen. Es gilt

$$\lambda \langle v, w\rangle \overset{\lambda\in\mathbb{R}\ (a)}{=} \langle \lambda v, w\rangle = \langle fv, w\rangle = \langle v, fw\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \mu \langle v, w\rangle .$$

Da $\lambda \neq \mu$ folgt $\langle v, w\rangle = 0$ also $v \perp w$. Somit folgt $V_\lambda(f) \perp V_\mu(f)$.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Seien $V = \mathbb{R}^3$ und $q : V \to \mathbb{R}$ die quadratische Form $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Es sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ die zu q assoziierte Bilinearform, so dass $q(x) = \frac{1}{2}\beta(x, x)$. Seien $u \in V$ ein isotroper Vektor und $v \in V$ mit $\beta(u, v) = 0$. Wir bezeichnen mit $E_{u,v} : V \to V$ die lineare Abbildung, welche durch

$$E_{u,v}(y) = y + \beta(y, u)\, v - \beta(y, v)\, u - \beta(y, u)\, q(v)\, u,\ \ y \in V$$

definiert ist (eine sogenannte Eichler-Transformation).

(a) Zeigen Sie, dass $E_{u,v}$ eine Isometrie von (V, q) ist.

(b) Zeigen Sie, dass $E_{u,v}(u) = u$.

(c) Zeigen Sie, dass $E_{u,v}(v) = v - 2q(v)\, u$.

Lösung:

a) Wir wissen, dass $q(x + y) = q(x) + q(x) + \beta(x, y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
q\left(E_{u,v}(y)\right) &= q\left(y + \beta(y,u)\, v - \beta(y,v)\, u - \beta(y,u)\, q(v)\, u\right) \\
&= q(y) + q\left(\beta(y,u)\, v - \beta(y,v)\, u - \beta(y,u)\, q(v)\, u\right) \\
&\quad +\beta\left(y, \beta(y,u)\, v - \beta(y,v)\, u - \beta(y,u)\, q(v)\, u\right) \\
&= q(y) + q\left(\beta(y,u)\, v\right) + q\left(-\beta(y,v)\, u - \beta(y,u)\, q(v)\, u\right) \\
&\quad +\beta\left(\beta(y,u)\, v, -\beta(y,v)\, u - \beta(y,u)\, q(v)\, u\right) \\
&\quad +\beta(y,u)\,\beta(y,v) - \beta(y,v)\,\beta(y,u) - \beta(y,u)\, q(v)\,\beta(y,u) \\
&= q(y) + \beta(y,u)^2\, q(v) + q\left(\beta(y,v)\, u\right) + q\left(\beta(y,u)\, q(v)\, u\right) \\
&\quad +\beta\left(\beta(y,v)\, u, \beta(y,u)\, q(v)\, u\right) - \beta(y,u)\,\beta(y,v)\,\beta(v,u) - \beta(v,u)\,\beta(y,u)^2\, q(v) \\
&\quad +\beta(y,u)\,\beta(y,v) - \beta(y,v)\,\beta(y,u) - \beta(y,u)\, q(v)\,\beta(y,u) \\
&= q(y) + \beta(y,u)^2\, q(v) + \beta(y,v)^2\, q(u) + \beta(y,u)^2\, q(v)^2\, q(u) \\
&\quad +\beta(y,v)\,\beta(y,u)\, q(v)\,\beta(u,u) - \beta(y,u)\,\beta(y,v)\,\beta(v,u) - \beta(v,u)\,\beta(y,u)^2\, q(v) \\
&\quad +\beta(y,u)\,\beta(y,v) - \beta(y,v)\,\beta(y,u) - \beta(y,u)\, q(v)\,\beta(y,u)
\end{aligned}$$

$q(u) = \beta(u,u) = \beta(u,v) = 0$ so folgt

$$\begin{aligned} q(E_{u,v}(y)) - q(y) &= \beta(y,u)^2 q(v) + \beta(y,u)\beta(y,v) - \beta(y,v)\beta(y,u) - \beta(y,u) q(v) \beta(y,u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

also ist $E_{u,v}$ eine Isometrie.

b) $E_{u,v}(u) = u + \beta(u,u)v - \beta(u,v)u - \beta(u,u)q(v)u = u$.

c)

$$\begin{aligned} E_{u,v}(v) &= v + \beta(v,u)v - \beta(v,v)u - \beta(v,u)q(v)u \\ &= v - \beta(v,v)u = v - 2q(v)u. \end{aligned}$$