Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 2. Juni 2008

Lineare Algebra II

9. Übung

Gruppenübungen

(G 36) Transformationsverhalten von Bilinearformen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V, W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Weiter sei $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform und B die zugehörige Grammatrix bezüglich einer Basis $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V sowie einer Basis $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ von W. Sind nun $\mathcal{V}' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ sowie $\mathcal{W}' = \{w_1', \ldots, w_m'\}$ beliebige Basen von V bzw. W und B' die Grammatrix zu β bezüglich $\mathcal{V}'$ und $\mathcal{W}'$, so gilt

$$B' = S^t B T,$$

wobei S eine Übergangsmatrix von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{V}'$ und T eine Übergangsmatrix von $\mathcal{W}$ nach $\mathcal{W}'$ bezeichnet.

(a) Leiten Sie diesen Satz aus der Matrixbeschreibung von β her.
($\beta(x, y) = x^t B y$, bezüglich $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$.)

(b) Folgern Sie, daraus: Ist β eine Bilinearform auf V und sind B und B' die Grammatrizen zu β bezüglich zweier Basen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}'$ von V, so gilt

$$\det(B) = \alpha^2 \det(B'), \quad \text{mit einem } \alpha \in \mathbb{K}.$$

(G 37)

Auf $\mathbb{R}^3$ seien Bilinearform β_1 und β_2 bezüglich der Standardbasis durch ihre Grammatrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

definiert. Geben Sie zu $i = 1{,}2$ eine Basis an, in der die Grammatrix von β_i Diagonalgestalt hat.

(G 38) Bilinearformen durch Integrale

Im Folgenden bezeichne $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ den Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Sei ϕ die Bilinearform auf $\mathcal{P}_2$, welche durch

$$\phi(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

definiert wird. Berechnen Sie die Grammatrix von ϕ bezüglich der Basis $1, x, x^2$ von $\mathcal{P}_2$.

(G 39)

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V eine endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Weiter sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine nicht entartete Bilinearform. Zeigen Sie: Ein System $v_1, \ldots, v_m$ von Vektoren aus V ist linear unabhängig, wenn die $m \times m$ - Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \beta(v_1, v_1) & \ldots & \beta(v_1, v_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta(v_m, v_1) & \ldots & \beta(v_m, v_m) \end{pmatrix}$$

nicht singulär ist.

(G 40)

Auf dem Vektorraum $M_2(\mathbb{R})$ der reellen 2×2-Matrizen sei b die folgendermaßen definierte Abbildung:

$$b : \ M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad b(A, B) = \mathrm{Spur}(AB).$$

(a) Zeigen Sie, dass b eine symmetrische Bilinearform auf $M_2(\mathbb{R})$ ist.

(b) Berechnen Sie die zu b gehörige Grammatrix im Bezug auf die Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Geben Sie eine Basis $f_1, \ldots, f_4$ von $M_2(\mathbb{R})$ an mit

$$\begin{aligned} b(f_j, f_k) = 0 \quad \text{für} \quad j \neq k,\ j, k \in \{1, \ldots, 4\}, \\ \text{und} \quad b(f_j, f_j) = 1, \quad j = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

Hausübungen

Im Folgenden bezeichne, wie in Aufgabe (G 38), $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ den Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$.

(H 21)

Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sei die Bilinearform β wie folgt definiert:

$$\beta(p_1, p_2) = p_1(1)p_2(2) + p_1(2)p_2(1)$$

(a) Bestimme den Teilraum $V_0 = \{p \in v \mid \beta(p, q) = 0.\ \forall q \in V\}$.

(b) Bestimme eine Orthogonalbasis von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ bezüglich β, d.h. eine Basis $f_1, \ldots, f_4$ mit $\beta(f_i, f_j) = 0$ für $i \neq j$.

(H 22)

Betrachten Sie die folgenden Bilinearformen auf $\mathcal{P}_1$:

$$\begin{aligned} \phi(f, g) &:= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x + y) f(x) g(y) \, dx \right) dy \\ \psi(f, g) &:= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x - y) f(x) g(y) \, dx \right) dy. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Grammatrizen von ϕ und ψ im Bezug auf die Basis 1, x.

(H 23)

(a) Finden Sie auf $\mathbb{R}^2$ symmetrische Bilinearformen zu den folgenden quadratischen Formen:

$$\begin{aligned} q_1(x) = x_1^2, \quad q_2(x) = x_1^2 - x_2^2, \quad q_3(x) = x_1 x_2, \\ \text{und} \quad q_4(x) = (x_1 + x_2)^2, \qquad \left(x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2\right). \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie: Die quadratische Form $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ gehört genau dann zu einer nicht entarteten symmetrischen Bilinearform, wenn $b^2 \neq ac$.

(Hinweis: Benutzen Sie die Formel aus (H 20b).)