Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 16. Juni 2008

Lineare Algebra II

9. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 36) Transformationsverhalten von Bilinearformen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V, W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Weiter sei $\beta : V \times W \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform und B die zugehörige Grammatrix bezüglich einer Basis $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V sowie einer Basis $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ von W. Sind nun $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ sowie $\mathcal{W}' = \{w_1', \dots, w_m'\}$ beliebige Basen von V bzw. W und B' die Grammatrix zu β bezüglich $\mathcal{V}'$ und $\mathcal{W}'$, so gilt

$$B' = S^t BT,$$

wobei S eine Übergangsmatrix von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{V}'$ und T eine Übergangsmatrix von $\mathcal{W}$ nach $\mathcal{W}'$ bezeichnet.

(a) Leiten Sie diesen Satz aus der Matrixbeschreibung von β her.
($\beta(x, y) = x^t By$, bezüglich $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$.)

(b) Folgern Sie, daraus: Ist β eine Bilinearform auf V und sind B und B' die Grammatrizen zu β bezüglich zweier Basen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}'$ von V, so gilt

$$\det(B) = \alpha^2 \det(B'), \quad \text{mit einem } \alpha \in \mathbb{K}.$$

LÖSUNG:

(a) Seien $x \in V$, $y \in W$. Die zugehörigen Spaltenvektoren, ausgedrückt in den Basen $\mathcal{V}$ bzw. $\mathcal{W}$, bezeichnen wir mit $\bar{x}$ und $\bar{y}$. Mit $\bar{x}'$ und $\bar{y}'$ bezeichnen wir die entsprechenden Vektoren in der Basis B'. Es gilt

$$\beta(x, y) = (\bar{x}')^t B' \bar{y}' = (\bar{x})^t B \bar{y} = (S\bar{x}')^t B(T\bar{y}') = (\bar{x}')^t (S^t BT)\bar{y}'.$$

Also ist $B' = S^t BT$.

(b) Der Basiswechsel zwischen den beiden Basen sei durch die Matrix S gegeben. Nach Teil (a) gilt $B' = S^t BS$. Für die Determinanten hat man somit

$$\det(B) = \det(S^t BS) = \det(S^t) \det(B) \det(S) = \det(S)^2 \det(B).$$

(G 37)

Auf $\mathbb{R}^3$ seien Bilinearform β_1 und β_2 bezüglich der Standardbasis durch ihre Grammatrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

definiert. Geben Sie zu $i = 1{,}2$ eine Basis an, in der die Grammatrix von β_i Diagonalgestalt hat.

LÖSUNG:

Wir bestimmen jeweils eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren zur Matrix B_i. Dies ergeben die Spaltenvektoren einer Transformationsmatrix S_i. Nach Aufgabe (G 36) ist $S_i^t B_i S_i$ die Grammatrix von β_i in dieser Basis. Nach dem Satz zur Hauptachsentransformation (B_i ist symmetisch) hat diese Matrix Diagonalgestalt.

Zu β_1**:** Die Eigenwerte von B_1 sind durch

$$0 = \det(\lambda E - B_1) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

gegeben, also gleich 1 (Vielfachheit 1) und -1 (Vielfachheit 2). Nun können wir die Eigenvektoren bestimmen:

Zu $\lambda = -1$:

$$\big(B_1 + E\big)x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = 0. \qquad \Rightarrow \; x \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zu $\lambda = 1$:

$$\big(B_1 - E\big)x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = 0. \qquad \Rightarrow \; x \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis der gesuchten Art ist also

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zu β_2**:** Bestimmung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \det(\lambda E - B_2) = \begin{vmatrix} \lambda & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} &= (\lambda + 1)\,[\lambda(\lambda - 1) - 2] \\ &= (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Wir haben also den doppelten Eigenwert -1 und den einfachen Eigenwert 2.
Bestimmung der Basis aus Eigenvektoren:

Zu $\lambda = 2$**:**

$$0 = (B_2 - 2E)x = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x. \quad \Rightarrow \; x_2 = \sqrt{2}x_1, x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als normierten Eigenvektor ehält man $\frac{\sqrt{3}}{2}\big(1, \sqrt{2}, 0\big)^t$.

Zu $\lambda = -1$**:**

$$0 = (B_2 + E)x = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x. \quad \Rightarrow x_1 + \sqrt{2}x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Orthonormalbasis des Eigenraums ist $\frac{\sqrt{3}}{2}\big(\sqrt{2}, -1, 0\big)^t$, $\big(0, 0, 1\big)^t$.

Ein Basis von $\mathbb{R}^3$ der gewünschten Form ist somit

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

(G 38) Bilinearformen durch Integrale

Im Folgenden bezeichne $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ den Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Sei ϕ die Bilinearform auf $\mathcal{P}_2$, welche durch

$$\phi(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

definiert wird. Berechnen Sie die Grammatrix von ϕ bezüglich der Basis $1, x, x^2$ von $\mathcal{P}_2$.

LÖSUNG:

Die Grammatrix von ϕ ist die Matrix mit den Einträgen $\phi(x^i, x^j)$, $i, j = 0, 1, 2$. Man berechnet leicht

$$\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dx = 2, \int_{-1}^{1} 1\cdot x dx = 0, \int_{-1}^{1} 1\cdot x^2 dx = \frac{2}{3}, \int_{-1}^{1} x\cdot x^2 dx = 0, \int_{-1}^{1} x^2\cdot x^2 dx = \frac{2}{5},$$

$$\text{also} \quad M_{\{1,x,x^2\}}(\phi) = \begin{pmatrix}\phi(1,1) & \phi(1,x) & \phi(1,x^2)\\ \phi(x,1) & \phi(x,x) & \phi(x,x^2)\\ \phi(x^2,1) & \phi(x^2,x) & \phi(x^2,x^2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\end{pmatrix}.$$

(G 39)

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V eine endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Weiter sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine nicht entartete Bilinearform. Zeigen Sie: Ein System $v_1, \ldots, v_m$ von Vektoren aus V ist linear unabhängig, wenn die $m \times m$ - Matrix

$$M = \begin{pmatrix}\beta(v_1,v_1) & \ldots & \beta(v_1,v_m)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta(v_m,v_1) & \ldots & \beta(v_m,v_m)\end{pmatrix}$$

nicht singulär ist.

LÖSUNG:

Wir zeigen: Sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig, so ist M singulär.

Annahme: Es gibt $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$ mit

$$a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0.$$

Da $\beta(w, 0) = 0$ für jedes $w \in V$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} &\beta(v_i, a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = 0\\ \text{also} \quad &a_1\beta(v_i,v_1) + \cdots + a_m\beta(v_i,v_m) = 0\end{aligned}$$

für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$. Aus diesem m Gleichungen erhält man eine Beziehung zwischen Vektoren im $\mathbb{K}^m$:

$$a_1\begin{pmatrix}\beta(v_1,v_1)\\ \vdots\\ \beta(v_m,v_1)\end{pmatrix} + \cdots + a_m\begin{pmatrix}\beta(v_1,v_m)\\ \vdots\\ \beta(v_m,v_m)\end{pmatrix} = \mathbf{0}_m.$$

Die auftretenden Vektoren sind aber genau die Spalten von M, diese sind folglich linear abhängig. Also ist M singulär.

(G 40)

Auf dem Vektorraum $M_2(\mathbb{R})$ der reellen 2×2-Matrizen sei b die folgendermaßen definierte Abbildung:

$$b: \ M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad b(A,B) = \mathrm{Spur}(AB).$$

(a) Zeigen Sie, dass b eine symmetrische Bilinearform auf $M_2(\mathbb{R})$ ist.

(b) Berechnen Sie die zu b gehörige Grammatrix im Bezug auf die Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Geben Sie eine Basis $f_1, \ldots, f_4$ von $M_2(\mathbb{R})$ an mit

$$b(f_j, f_k) = 0 \quad \text{für} \quad j \neq k, \ j,k \in \{1, \ldots, 4\},$$
$$\text{und} \quad b(f_j, f_j) = 1, \quad j = 1, \ldots, 4.$$

Lösung:

(a) Die Abbildung b ist symmetrisch, da $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$. (Dies sollte bekannt sein, für $M_2(\mathbb{R})$ ist es jedoch auch leicht nachzuprüfen: $\mathrm{Spur}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right) = au + bw + cv + dx = \mathrm{Spur}\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.) Weiter ist klar, dass $\mathrm{Spur}(a_1A_1 + a_2A_2, B) = a_1 \mathrm{Spur}(A_1, B) + a_2 \mathrm{Spur}(A_2, B)$ für alle $a_i \in \mathbb{R}$ und $A_i \in M_2(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$. Also hat man (wegen Symmetrie) auch die Bilinearität.

(b) Man rechnet leicht aus, dass

$$e_1^2 = e_1, \ e_1e_2 = e_2, \ e_2e_1 = 0, \ e_1e_3 = 0, \ e_3e_1 = e_3, e_1e_4 = e_4e_1 = 0,$$
$$e_2 = 0, \ e_2e_3 = e_1, \ e_3e_2 = e_4, \ e_2e_4 = e_2, \ e_4e_2 = 0, \ e_3e_4 = 0, \ e_4e_3 = e_3, \quad e_4^2 = e_4.$$

(Tatsächlich kann man sich aufgrund der Symmetrie von b 6 dieser Berechnungen sparen.) Somit ist die Spur $b(e_i, e_j) = 1$ für $(i,j) \in \{(1,1), (2,3), (3,2), (4,4)\}$ und sonst gleich 0. Also ist die Grammatrix von b bezüglich der gegebenen Basis

$$G_{\{e_1, \ldots, e_4\}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Offenbar hat man bereits $b(e_1, e_4) = 0$ sowie $b(e_1, e_1) = b(e_4, e_4) = 1$. Außerdem gilt $b(e_1, v) = b(e_4, v) = 0$ für jedes $v \in \mathrm{lin}\{e_2, e_3\}$. Wir setzen also $f_1 = e_1$, $f_4 = e_4$ und müssen nur noch eine geeignete Basis für den von e_2 und e_3 erzeugten Teilraum wählen. Ein Matrix aus diesem Teilraum hat die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & v \\ w & 0 \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \ (a,b) \neq (0,0).$$

Für zwei solche Matrizen, A_1, A_2, ist $b(A_1, A_2) = v_1w_2 + w_1v_2$. Damit $b(A_1, A_2) = 0$, müssen alle Einträge $\neq 0$ sein und es muss $v_1w_2 = -w_1v_2$ gelten. Eine mögliche Wahl für A_1, A_2 ist somit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $b(A_1, A_1) = b(A_2, A_2) = 2$. Setzen man nun $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}A_1$ und $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}A_2$, so hat man eine Basis der gewünschten Form.

Hausübungen

Im Folgenden bezeichne, wie in Aufgabe (G 38), $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ den Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$.

(H 21)

Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sei die Bilinearform β wie folgt definiert:

$$\beta(p_1, p_2) = p_1(1)p_2(2) + p_1(2)p_2(1)$$

(a) Bestimme den Teilraum $V_0 = \{p \in v \mid \beta(p, q) = 0. \forall q \in V\}$.

(b) Bestimme eine Orthogonalbasis von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ bezüglich β, d.h. eine Basis $f_1, \dots, f_4$ mit $\beta(f_i, f_j) = 0$ für $i \neq j$.

LÖSUNG:

(a) Damit $\beta(p, q) = 0$ für beliebige $q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, muss $p(1) = p(2) = 0$ gelten. Das heißt, das Polynom $(x-1)(x-2)$ ist ein Teiler von $p(x)$. Der gesuchte Teilraum V_0 lässt sich also auf folgende Arten beschreiben:

$$\begin{aligned} V_0 &= \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p(1) = p(2) = 0\} = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid (x-1)(x-2) \mid p(x)\} \\ &= \left\{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p(x) = a(x-1)(x-2)(x-c)^b,\ a, c \in \mathbb{R}, b \in \{0, 1\}\right\}. \end{aligned}$$

(Als Menge ist V_0 gleich $\{(x-1)(x-2)\} \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.)

(b) Bezeichne mit W den Teilraum von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, auf dem β nicht ausgeartet ist. Da offenbar 1 und x linear unabhägig und nicht in V_0 entalten sind, folgt $\dim W \geq 2$, da V_0 ein Teilraum ist, der z.B. die linear unabhängigen Polynome $(x-1)(x-2)$ und $x(x-1)(x-2)$ enthält, gilt $\dim V_0 \geq 2$, also $\dim W = \dim V_0 = 2$.

Hat man nun eine Orthogonalbasis f_1, f_2 von W gefunden, und hat man zwei linear unabhängige Elemente, f_3, f_4 aus V_0, so gilt per Definition automatisch $\beta(f_1, f_j) = \beta(f_2, f_j) = 0$ für $j = 3, 4$ aber auch $\beta(f_3, f_4) = 0$. Es genügt also, eine Orhogonalbasis von W zu bestimmen und zwei linear unabhängige Elemente in V_0.

Geht man z.B. von dem linear unabhängigen System $\{1, x\} \subset W$ aus, so erhält man

$$\begin{aligned} f_1 &= 1, \\ f_2 &= x - \frac{\beta(x, 1)}{\beta(1, 1)} 1 = x - \frac{2+1}{2} = x - \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

als Orthogonalbasis von W. Wählt man nun etwa $f_3 = (x-1)(x-2)$ und $f_4 = x(x-1)(x-2)$, so ist man fertig.

Bemerkung: Man kann auch, wenn man von der Standardbasis $\{1, x, x^2, x^3\}$ von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ ausgeht, mit dem Orthogonalisieren fortfahren und eine andere Basis erhalten:

$$\begin{aligned} f_3' &= x^2 - \frac{\beta(x^2, 1)}{\beta(1, 1)} 1 - \frac{\beta(x^2, x - 3/2)}{\beta(x - 3/2, x - 3/2)} 1 = x^2 - \frac{4+1}{2} 1 - \frac{-2 + 1/2}{-1/2}(x - \frac{3}{2}) \\ &= x^2 - \frac{5}{2} + \frac{9}{2} - 3x = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = f_3, \end{aligned}$$

Da das so erhaltene f_3' in V_0 liegt, genügt es, das Polynom x^3 (linear unabhängig von den vorherigen) so auszurichten, dass es auch senkrecht zu f_1 und f_2 ist.

$$\begin{aligned} f_4' &= x^3 - \frac{\beta(x^3, 1)}{\beta(1, 1)} 1 - \frac{\beta(x^3, f_2)}{\beta(f_2, f_2)} f_2 = x^3 - \frac{8+1}{2} - \frac{1/2 - 8/2}{-1/2}(x - \frac{3}{2}) \\ &= x^3 - \frac{9}{2} - 7x + \frac{21}{2} = x^3 - 7x + 6. \end{aligned}$$

(H 22)

Betrachten Sie die folgenden Bilinearformen auf $\mathcal{P}_1$:

$$\begin{aligned}\phi(f,g) &:= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)f(x)g(y)\,dx\right)\,dy\\ \psi(f,g) &:= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x-y)f(x)g(y)\,dx\right)\,dy.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Grammatrizen von ϕ und ψ im Bezug auf die Basis 1, x.

LÖSUNG:

Ähnlich wie in (G 38) gilt es, $\phi(1,1), \phi(1,x) = \phi(x,1), \phi(x,x)$ (man beachte die Symmetrie von ϕ) und $\psi(1,1)$, $\psi(1,x)$, $\psi(x,1)$ sowie $\psi(x,x)$ zu berechnen :

$$\begin{aligned}\left.\begin{matrix}\phi(1,1)\\ \psi(1,1)\end{matrix}\right\} &= \int_0^1 \int_0^1 (x \pm y)\,dxdy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \pm y\right) dy = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases}1\\ 0\end{cases},\\ \phi(1,x) = \phi(x,1) &= \int_0^1 \int_0^1 (x+y)x\,dxdy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}y\right) dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},\\ \psi(x,1) &= \int_0^1 \int_0^1 (x-y)x\,dxdy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}y\right) dy = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\\ \psi(1,x) &= \int_0^1 \int_0^1 (x-y)y\,dxdy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y - y^2\right) dy = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\\ \left.\begin{matrix}\phi(1,1)\\ \psi(1,1)\end{matrix}\right\} &= \int_0^1 \int_0^1 (x \pm y)xy\,dxdy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}y \pm \frac{1}{2}y^2\right) dy = \frac{1}{6} \pm \frac{1}{6} = \begin{cases}\frac{2}{6}\\ 0\end{cases}.\end{aligned}$$

Es stellt sich also heraus, dass ψ antisymmetrisch ist. Man erhält somit als Grammatrizen

$$G_{\{1,x\}}(\phi) = \begin{pmatrix}1 & \frac{7}{12}\\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}, \quad G_{\{1,x\}}(\psi) = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{12}\\ -\frac{1}{12} & 0\end{pmatrix}.$$

(H 23)

(a) Finden Sie auf $\mathbb{R}^2$ symmetrische Bilinearformen zu den folgenden quadratischen Formen:

$$\begin{gathered}q_1(x) = x_1^2, \quad q_2(x) = x_1^2 - x_2^2, \quad q_3(x) = x_1x_2,\\ \text{und} \quad q_4(x) = (x_1+x_2)^2, \qquad \left(x = (x_1,x_2)^t \in \mathbb{R}^2\right).\end{gathered}$$

(b) Zeigen Sie: Die quadratische Form $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ gehört genau dann zu einer nicht entarteten symmetrischen Bilinearform, wenn $b^2 \neq ac$.

(Hinweis: Benutzen Sie die Formel aus (H 20b).)

LÖSUNG:

(a) Man erhält die zu einer quadratischen Form q gehörige Bilinearform β mit der Formel

$$\beta(v,w) = \frac{1}{2}\left[q(v+w) - q(v) - q(w)\right]$$

(sogenannte *Polarisationsformel*). Zu q_i, $i = 1, \dots, 4$ ergeben sich damit folgende Bilinearformen (hierbei sind $v = (v_1, v_2)^t$ und $w = (w_1, w_2)^t \in \mathbb{R}^2$):

$$\begin{aligned}
\beta_1(v,w) &= \frac{1}{2}\left((v_1+w_1)^2 - v_1^2 - w_1^2\right) = w_1 v_1, \\
\beta_2(v,w) &= \frac{1}{2}\left((v_1+w_1)^2 - (v_2+w_2)^2 - v_1^2 + v_2^2 - w_1^2 + w_2^2\right) = v_1 w_1 - v_2 w_2, \\
\beta_3(v,w) &= \frac{1}{2}\left((v_1+w_1)(v_2+w_2) - v_1 v_2 - w_1 w_2\right) = \frac{1}{2}\left(v_1 w_2 + v_2 w_1\right), \\
\beta_4(v,w) &= \frac{1}{2}\left(\left((v_1+w_1)+(v_2+w_2)\right)^2 - (v_1+v_2)^2 - (w_1+w_2)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\big(v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 + 2v_1v_2 + 2v_1w_1 + 2v_1w_2 + 2v_2w_1 + 2v_2w_2 + 2w_1w_2 \\
&\qquad - v_1^2 - v_2^2 - 2v_1v_2 - w_1^2 - w_2^2 - 2w_1w_2\big) \\
&= v_1w_1 + v_1w_2 + v_2w_1 + v_2w_2.
\end{aligned}$$

(b) Die zu q gehörige Bilinearform $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\beta\left((x_1,x_2)^t, (y_1,y_2)^t\right) &= \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right] \\
&= \frac{1}{2}\big[a(x_1+y_1)^2 + 2b(x_1+y_1)(x_2+y_2) + c(x_2+y_2)^2 \\
&\qquad - ax_1^2 - 2bx_1x_2 - cx_2^2 - ay_1^2 - 2by_1y_2 - cy_2^2\big] \\
&= ax_1y_1 + b\left(x_1y_2 + y_1x_2\right) + cx_2y_2.
\end{aligned}$$

Es ist klar, dass β symmetrisch ist. Die Grammatrix (bezüglich der Standardbasis $(1,0)^t, (0,1)^t$) ist

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Genau dann, wenn diese Matrix nichtsingulär ist, ist β nicht entartet, also wenn $\det B = ac - b^2 \neq 0$.