Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Erik Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 6.10.2007

Lineare Algebra II

8. Übung

Gruppenübungen

(G 33) Wiederholung

(a) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der folgenden Matrizen:

$$\text{(i)}\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse. Bestimmen Sie die Richtung der Drehachse und den Drehwinkel.

(G 34) Adjungierte Abbildungen

Beweisen Sie: Sind $g : U \to V$, $f : V \to W$ zwei lineare Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, so gilt $(fg)^* = g^* f^*$.

Definition: Die darstellende Matrix $A = (f(v_i, v_j))_{ij}$ einer Bilinearform $V \times V \to \mathbb{K}$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V (vgl. 7. Tutorium) wird die *Gram-Matrix von f bezüglich $\mathcal{B}$* genannt.

(G 35) Bilinearformen

(a) Die Bilinearform $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei bezüglich der Standardbasis durch die Gram-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

gegeben. Gibt es einen nicht trivialen Unterraum $U \leq \mathbb{R}^3$, so daß für alle $x \in U$ die Abbildung $f_x := F(x, -) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ identisch Null ist?

(b) Es sei nun $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit Gram-Matrix $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis. Gibt es einen nicht trivialen Unterraum U wie in a), d.h. so, daß $G(x, -) \equiv 0$ für alle $x \in U$ gilt?

Es sei Q die G entsprechende quadratische Form $Q(x) := G(x, x)$. Für welche Unterräume U von $\mathbb{R}^2$ ist $Q_{|U} : U \to \mathbb{R}$ identisch Null, d.h. $q(u) = 0$ für alle $u \in U$?

Hausübungen

(H 19) Adjungierte Abbildungen

Es sei $f : V \to W$ lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Beweisen Sie folgende aussagen:

(a) Ist f injektiv, so $f^* : W^* \to V^*$ surjektiv.

(b) Ist f surjektiv, so $f^* : W^* \to V^*$ injektiv.

(c) Ist f ein Isomorphismus, so ist auch $f^* : W^* \to V^*$ ein Isomorphismus.

(H 20) Bilinearformen

(a) Zeigen Sie, daß jede reelle Bilinearform die Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Bilinearform ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $f(v, w) = \frac{1}{2}[q(v + w) - q(v) - q(w)]$ für jede reelle quadratische Form q bilinear und symmetrisch ist.