



Lineare Algebra II

8. Übung

Gruppenübungen

(G 33) Wiederholung

(a) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der folgenden Matrizen:

$$(i) B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad (ii) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse. Bestimmen Sie die Richtung der Drehachse und den Drehwinkel.

(G 34) Adjungierte Abbildungen

Beweisen Sie: Sind $g : U \rightarrow V$, $f : V \rightarrow W$ zwei lineare Abbildungen zwischen \mathbb{K} -Vektorräumen, so gilt $(fg)^* = g^*f^*$.

Definition: Die darstellende Matrix $A = (f(v_i, v_j))_{ij}$ einer Bilinearform $V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V (vgl. 7. Tutorium) wird die *Gram-Matrix* von f bezüglich \mathcal{B} genannt.

(G 35) Bilinearformen

(a) Die Bilinearform $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei bezüglich der Standardbasis durch die Gram-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

gegeben. Gibt es einen nicht trivialen Unterraum $U \leq \mathbb{R}^3$, so daß für alle $x \in U$ die Abbildung $f_x := F(x, -) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ identisch Null ist?

- (b) Es sei nun $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit Gram-Matrix $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis. Gibt es einen nicht trivialen Unterraum U wie in a), d.h. so, daß $G(x, -) \equiv 0$ für alle $x \in U$ gilt?

Es sei Q die G entsprechende quadratische Form $Q(x) := G(x, x)$. Für welche Unterräume U von \mathbb{R}^2 ist $Q|_U : U \rightarrow \mathbb{R}$ identisch Null, d.h. $q(u) = 0$ für alle $u \in U$?

Hausübungen

(H 19) Adjungierte Abbildungen

Es sei $f : V \rightarrow W$ lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen \mathbb{K} -Vektorräumen. Beweisen Sie folgende aussagen:

- (a) Ist f injektiv, so $f^* : W^* \rightarrow V^*$ surjektiv.
- (b) Ist f surjektiv, so $f^* : W^* \rightarrow V^*$ injektiv.
- (c) Ist f ein Isomorphismus, so ist auch $f^* : W^* \rightarrow V^*$ ein Isomorphismus.

(H 20) Bilinearformen

- (a) Zeigen Sie, daß jede reelle Bilinearform die Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Bilinearform ist.
- (b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $f(v, w) = \frac{1}{2}[q(v + w) - q(v) - q(w)]$ für jede reelle quadratische Form q bilinear und symmetrisch ist.