Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Erik Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008 6.10.2007

Lineare Algebra II

5. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 33) Wiederholung

(a) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der folgenden Matrizen:

$$\text{(i)}\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse. Bestimmen Sie die Richtung der Drehachse und den Drehwinkel.

LÖSUNG:

(a) (i)
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda-3) = (-2-\lambda)^2(4-\lambda)$$

Also sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 4$ Eigenwerte.

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+(-II),III+(-2II)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Alle Vektoren der Form $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot \mu \neq 0$, sind Eigenvektoren.

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+(-III),II+(-III)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Setze $x_2 = \lambda \Rightarrow x_3 = 2\lambda$ und $x_1 = \lambda$.

Also sind alle Vektoren der Form $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Eigenvektoren.

(ii) Zunächst sind die Eigenwerte von A zu bestimmen. Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{4. Zeile}}}{=} (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} - \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=0}$$

$$\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{1. Zeile}}}{=} (2-\lambda) \left[(1-\lambda)(3-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda)+1) + ((1-\lambda)(3-\lambda)+1)\right]$$
$$= (2-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda)+1)^2 = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)^2 = (2-\lambda)(\lambda-2)^4$$
$$= (2-\lambda)^5$$

Folglich besitzt A den Eigenwert $\lambda_1 = 2$ mit der algebraischen Vielfachheit fünf, womit A eine Jordannormalform besitzt.

Da A nur einen Eigenwert besitzt, gibt es auch nur einen verallgemeinerten Eigenraum, womit $V^{\lambda_1} = \mathbb{R}^5$ gilt. Mit dem Verfahren aus der Vorlesung kommt man nun sehr schnell zum Ziel, da das Berechnen von $\ker(A - 2I)^j$ entfallen kann. Als Basis des verallgemeinerten Eigenraums zur Eigenwert 2 kann zum Beispiel die Standardbasis des $\mathbb{R}^5$ gewählt werden. Daraus lassen sich nun Jordanketten bilden.

Es sei

$$v_3 := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 := (A - 2I)v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 := (A - 2I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_0 := (A - 2I)v_1 = 0$$

Aus $v_0 = 0$ folgt, daß v_1 ein Eigenvektor ist und v_3 ein Hauptvektor der Stufe 3. Daher ist (v_1, v_2, v_3) eine Jordankette.

Weiter sei

$$w_2 := e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_1 := (A - 2I)w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_0 := (A - 2I)w_1 = 0$$

Aus $w_0 = 0$ folgt, daß w_1 ein Eigenvektor ist und w_2 ein Hauptvektor der Stufe 2. Daher ist (w_1, w_2) eine Jordankette.

Da v_1 und w_1 linear unabhängig sind, sind auch v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 linear unabhängig und daher

$$(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von A und

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.

Alternativ hätte auch folgende Rechnung zum Ziel geführt: Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_1 gilt

$$E_1 := \ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich gibt es zum Eigenwert λ_1 zwei Jordanblöcke.

Zum Bestimmen der noch fehlenden Basisvektoren des verallgemeinerten Eigenraums zum Eigenwert λ_1 sind zwei Jordanketten zu finden. Wir lösen zunächst das Gleichungssystem:

$$(A - \lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_1.$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist

$$L_1 := \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um zu testen, ob sich die Jordankette fortsetzen läßt betrachte das Gleichungssystem

$$(A-\lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = v_1 + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die erweiterte Systemmatrix lautet

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{II+I \\ III+IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Folglich besitzt das Gleichungssystem keine Lösung und die Jordankette ist nicht weiter fortsetzbar.

Wir wählen einen Vektor $v_2 = (0, -1, 0, 0, 0) \in L_1$ und erhalten die Jordankette (v_1, v_2).

Nun ist noch eine Jordankette der Länge drei zu finden mit $w_1 = (0, 1, 0, 1, 0)^T$ als ersten Vektor. Dazu ist zunächst das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$(A-\lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1.$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist

$$L_2 := \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wählen (auf gut Glück) $w_2 := (1, -1, 0, 0, 1) \in L_2$ und betrachten das Gleichungssystem

$$(A-\lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = w_2.$$

Der Vektor $w_3 := (-1, 1, 0, 0, 0)^T$ ist eine Lösung des obigen Gleichungssystems. Folglich ist (w_1, w_2, w_3) eine Jordankette und

$$(v_1, v_2, w_1, w_2, w_3) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von A und

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.

(b) Bei einer Drehung sind die Vektoren der Drehachse dadurch ausgezeichnet, da sie durch die Drehung nicht verändert werden, da also $Ax = x$ gilt. D.h. x ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir bestimmen diese Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{4II, III+4I} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} + 2 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} - 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{I + (\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}})} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}(8 - 4\sqrt{3}) & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} - 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $(1, 0, 1)^T$ ein solcher Eigenvektor und damit ist $(1, 0, 1)^T$ die Richtung der Drehachse.
Um den Drehwinkel zu bestimmen, bilden wir einen zur Drehachse senkrechten Vektor. z.B. $x = (0, 1, 0)^T$ mit der Drehung ab. Es gilt

$$Ax = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und der Winkel α zwischen x und Ax ist der Drehwinkel:

$$\cos(\alpha) = \frac{x \cdot Ax}{||x|| \cdot ||Ax||} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

also gilt $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

(G 34) Adjungierte Abbildungen

Beweisen Sie: Sind $g : U \to V$, $f : V \to W$ zwei lineare Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, so gilt $(fg)^* = g^* f^*$.

LÖSUNG:

Nach Definition bildet die Abbildung $(fg)^* : W^* \to V^*$ eine Linearform $L \in W^*$ auf die Linearform $L \circ (fg)$ ab. Desgleichen gilt $f^*(L) = L \circ f$ und $g^*(L \circ f) = (L \circ f) \circ g$. Es folgt $g^* f^*(L) = g^*(L \circ f) = L \circ (fg) = (Fg)^*(L)$.

Definition: Die darstellende Matrix $A = (f(v_i, v_j))$ einer Bilinearform $V \times V \to \mathbb{K}$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V (vgl. 7. Tutorium) wird die *Gram-Matrix von f bezüglich $\mathcal{B}$* genannt.

(G 35) Bilinearformen

(a) Die Bilinearform $F(x,y) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei bezüglich der Standardbasis durch die Gram-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

gegeben. Gibt es einen Unterraum $U \leq \mathbb{R}^3$, so daß für alle $x \in U$ die Abbildung $f_x := F(x, -) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ identisch Null ist, d.h. $f_x(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$ gilt?

(b) Es sei jetzt $G(x,y) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, eine Bilinearform mit Gram-Matrix $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis. Gibt es einen Unterraum U wie in a), d.h. so, daß $G(x, -) \equiv 0$ für alle $x \in U$ gilt?

Sei Q die G entsprechende quadratische Form $Q(x) := G(x,x)$. Für welche Unterräume U von $\mathbb{R}^2$ ist $Q_{|U} : U \to \mathbb{R}$ identisch Null, d.h. $q(u) = 0$ für alle $u \in U$?

LÖSUNG:

(a) Die Abbildung $f_x := F(x,.) : \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist genau dann identisch Null, wenn x Eigenvektor von $A^T = A$ zum Eigenwert 0 ist.
Man sieht (1. + 2. = 3. Spalte), daß 0 Eigenwert von A ist und ($\text{rg}(A) = 2$) dessen geometrische Vielfachheit 1 ist. Der gesuchte Unterraum U ist der Eigenraum zum Eigenwert 0 und wird daher z.B. von $(1, 1, -1)^T$ erzeugt.

(b) Die G entsprechende Matrix B ist nichtsingulär, die Bilinearform also nicht entartet, bzw. es gibt keinen Unterraum mit der Eigenschaft aus a).

Zunächst führt man die Hauptachsentransformation durch. Die Eigenwerte von B sind -3 und 2, die neuen Koordinaten seien (entsprechend den jeweiligen Eigenvektoren von B) $y_1 = -2x_1 + x_2$ und $y_2 = x_1 + 2x_2$. Die Matrix der Bilinearform bzgl. der neuen Koordinaten ist daher

$$B' = S^T B S = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung $Q(x,x) = 0$ wird damit zu $3y_1^2 = 2y_2^2$. Die gesuchten Teilräume sind daher die Ursprungsgeraden $y_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} y_1$ bzw. wieder in den ursprünglichen Koordinaten

$x_1 + 2x_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}(-2x_1 + x_2)$. Das + führt auf $(2 - \sqrt{\frac{3}{2}})x_2 = -2\sqrt{\frac{3}{2}}x_1 - x_1$ und schließlich auf $x_2 = -(13 + 5\sqrt{\frac{3}{2}})x_1$.

Im anderen Fall erhält man $x_2 = (5\sqrt{\frac{3}{2}} - 13)x_1$.

Hausübungen

(H 19) Adjungierte Abbildungen

Es sei $f : V \to W$ lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Beweisen Sie folgende aussagen:

(a) Ist f injektiv, so $f^* : W^* \to V^*$ surjektiv.

(b) Ist f surjektiv, so $f^* : W^* \to V^*$ injektiv.

(c) Ist f ein Isomorphismus, so ist auch $f^* : W^* \to V^*$ ein Isomorphismus.

LÖSUNG:

(a) Es sei $f : V \to W$ injektiv. Wir wählen eine Basis $\mathcal{V} = (v_1, ldots, v_n)$ von V. Da die Abbildung f injektiv ist, sind die Bilder $f(v_i)$ der Basisvektoren v_i in W linear unabhängig. Diese Menge ergänzen wir zu einer Basis $\mathcal{W} = (f(v_!), \ldots, f(v_n), w_1, \ldots, w_m)$ von W. Ist $L : V \to \mathbb{K}$ eine Linearform, so definiert die Vorschrift $f(v_i) \mapsto L(v_i)$, $w_j \mapsto 0$ eine Linearform L' auf W. Nach Konstruktion gilt $f^*(L')(v_i) = L' \circ f(v_i) = L(v_i)$. Weil die Linearform L durch die Werte auf den Basisvektoren eindeutig bestimmt ist, folgt $f^*(L') = L$. Somit liegt jede Linearform $L \in V^*$ im Bild von f^*, d.h. f^* ist surjektiv.

(b) Es sei $f : V \to W$ surjektiv und $\mathcal{V} = (v_1, ldots, v_n)$ eine Bais von V. Weil f surjektiv ist, gibt es eine Teilmenge $v_1, \ldots, v_m$ von $\mathcal{B}$, so daß das Bild $f(v_1), \ldots, f(v_m)$ eine Basis von W bildet. Sind nun $L \in W^*$ und $L' \in W^*$ zwei Linearformen auf W mit gleichem Bild $f^*L = f^*L'$ unter f^*, so gilt insbesondere auch $L(f(v_i)) = (f^*L)(v_i) = (f^*L')(v_i)$ für alle $0 \leq i \leq n$. Somit stimmen die Linearformen L und L' auf W überein. Dies zeigt, daß die adjungierte Abbildung f^* injektiv ist.

(c) Ist f ein Isomorphismus, so ist f injektiv und surjektiv. Somit ist $f^* : W^* \to V^*$ surjektib und injektiv, also ein Isomorphismus.

(H 20) Bilinearformen

(a) Zeigen Sie, daß jede reelle Bilinearform die Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Bilinearform ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $f(v, w) = \frac{1}{2}[q(v + w) - q(v, v) - q(w, w)]$ für jede reelle quadratische Form q bilinear und symmetrisch ist.

LÖSUNG:

(a) Ist $f : V \times V \to \mathbb{R}$ eine reelle Bilinearform, so werden durch $f_s(v, w) := \frac{1}{2}[f(v, w) + f(w, v)]$ und $f_a(v, w) := \frac{1}{2}[f(v, w) - f(w, v)]$ zwei Bilinearformen $f_s, f_a : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert. Nach Konstruktion ist f_s symmetrisch und f_a antisymmetrisch. Weiterhin gilt $f = f_s + f_a$.

(b)