**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Erik Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 6.10.2007

# Lineare Algebra II

## 5. Übung mit Lösungshinweisen

### Gruppenübungen

**(G 33) Wiederholung**

(a) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform der folgenden Matrizen:

$$\text{(i)}\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse. Bestimmen Sie die Richtung der Drehachse und den Drehwinkel.

LÖSUNG:

(a) (i) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2-\lambda & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

$= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda-3) = (-2-\lambda)^2(4-\lambda)$

Also sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 4$ Eigenwerte.

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+(-II),III+(-2II)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Alle Vektoren der Form $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot \mu \neq 0$, sind Eigenvektoren.

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+(-III),II+(-III)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Setze $x_2 = \lambda \Rightarrow x_3 = 2\lambda$ und $x_1 = \lambda$.

Also sind alle Vektoren der Form $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Eigenvektoren.

(ii) Zunächst sind die Eigenwerte von $A$ zu bestimmen. Für das charakteristische Polynom von $A$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{4. Zeile}}}{=} (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} - \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=0}$$

$$\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{1. Zeile}}}{=} (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda)+1) + ((1-\lambda)(3-\lambda)+1)\right]$$
$$= (2-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda)+1)^2 = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)^2 = (2-\lambda)(\lambda-2)^4$$
$$= (2-\lambda)^5$$

Folglich besitzt $A$ den Eigenwert $\lambda_1 = 2$ mit der algebraischen Vielfachheit fünf, womit $A$ eine Jordannormalform besitzt.

Da $A$ nur einen Eigenwert besitzt, gibt es auch nur einen verallgemeinerten Eigenraum, womit $V^{\lambda_1} = \mathbb{R}^5$ gilt. Mit dem Verfahren aus der Vorlesung kommt man nun sehr schnell zum Ziel, da das Berechnen von $\ker(A - 2I)^j$ entfallen kann. Als Basis des verallgemeinerten Eigenraums zur Eigenwert 2 kann zum Beispiel die Standardbasis des $\mathbb{R}^5$ gewählt werden. Daraus lassen sich nun Jordanketten bilden.

Es sei

$$v_3 := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 := (A - 2I)v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 := (A - 2I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_0 := (A - 2I)v_1 = 0$$

Aus $v_0 = 0$ folgt, daß $v_1$ ein Eigenvektor ist und $v_3$ ein Hauptvektor der Stufe 3. Daher ist $(v_1, v_2, v_3)$ eine Jordankette.

Weiter sei

$$w_2 := e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_1 := (A - 2I)w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_0 := (A - 2I)w_1 = 0$$

Aus $w_0 = 0$ folgt, daß $w_1$ ein Eigenvektor ist und $w_2$ ein Hauptvektor der Stufe 2. Daher ist $(w_1, w_2)$ eine Jordankette.

Da $v_1$ und $w_1$ linear unabhängig sind, sind auch $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2$ linear unabhängig und daher

$$(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von $A$ und

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.

Alternativ hätte auch folgende Rechnung zum Ziel geführt: Für den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1$ gilt

$$E_1 := \ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich gibt es zum Eigenwert $\lambda_1$ zwei Jordanblöcke.

Zum Bestimmen der noch fehlenden Basisvektoren des verallgemeinerten Eigenraums zum Eigenwert $\lambda_1$ sind zwei Jordanketten zu finden. Wir lösen zunächst das Gleichungssystem:

$$(A - \lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_1.$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist

$$L_1 := \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um zu testen, ob sich die Jordankette fortsetzen läßt betrachte das Gleichungssystem

$$(A-\lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = v_1 + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die erweiterte Systemmatrix lautet

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{II+I \\ III+IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Folglich besitzt das Gleichungssystem keine Lösung und die Jordankette ist nicht weiter fortsetzbar.

Wir wählen einen Vektor $v_2 = (0,-1,0,0,0) \in L_1$ und erhalten die Jordankette $(v_1, v_2)$.

Nun ist noch eine Jordankette der Länge drei zu finden mit $w_1 = (0,1,0,1,0)^T$ als ersten Vektor. Dazu ist zunächst das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$(A-\lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1.$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist

$$L_2 := \left\{ s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wählen (auf gut Glück) $w_2 := (1,-1,0,0,1) \in L_2$ und betrachten das Gleichungssystem

$$(A-\lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = w_2.$$

Der Vektor $w_3 := (-1,1,0,0,0)^T$ ist eine Lösung des obigen Gleichungssystems. Folglich ist $(w_1, w_2, w_3)$ eine Jordankette und

$$(v_1, v_2, w_1, w_2, w_3) = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von $A$ und
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
die zugehörige Jordannormalform.

(b) Bei einer Drehung sind die Vektoren der Drehachse dadurch ausgezeichnet, da sie durch die Drehung nicht verändert werden, da also $Ax = x$ gilt. D.h. $x$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wir bestimmen diese Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}-1 & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{4II, III+4I} &\begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3}+2 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3}-4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{I+(\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{2}})} &\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}(8-4\sqrt{3}) & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3}-4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist $(1,0,1)^T$ ein solcher Eigenvektor und damit ist $(1,0,1)^T$ die Richtung der Drehachse.
Um den Drehwinkel zu bestimmen, bilden wir einen zur Drehachse senkrechten Vektor. z.B. $x = (0,1,0)^T$ mit der Drehung ab. Es gilt

$$Ax = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und der Winkel $\alpha$ zwischen $x$ und $Ax$ ist der Drehwinkel:

$$\cos(\alpha) = \frac{x \cdot Ax}{||x|| \cdot ||Ax||} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

also gilt $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

## (G 34) Adjungierte Abbildungen

Beweisen Sie: Sind $g : U \to V$, $f : V \to W$ zwei lineare Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, so gilt $(fg)^* = g^* f^*$.

LÖSUNG:

Nach Definition bildet die Abbildung $(fg)^* : W^* \to V^*$ eine Linearform $L \in W^*$ auf die Linearform $L \circ (fg)$ ab. Desgleichen gilt $f^*(L) = L \circ f$ und $g^*(L \circ f) = (L \circ f) \circ g$. Es folgt $g^* f^*(L) = g^*(L \circ f) = L \circ (fg) = (Fg)^*(L)$.

**Definition:** Die darstellende Matrix $A = (f(v_i, v_j))$ einer Bilinearform $V \times V \to \mathbb{K}$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $V$ (vgl. 7. Tutorium) wird die *Gram-Matrix von $f$ bezüglich $\mathcal{B}$* genannt.

### (G 35) Bilinearformen

(a) Die Bilinearform $F(x,y) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei bezüglich der Standardbasis durch die Gram-Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$
gegeben. Gibt es einen Unterraum $U \leq \mathbb{R}^3$, so daß für alle $x \in U$ die Abbildung $f_x := F(x,-) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ identisch Null ist, d.h. $f_x(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$ gilt?

(b) Es sei jetzt $G(x,y) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, eine Bilinearform mit Gram-Matrix $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis. Gibt es einen Unterraum $U$ wie in a), d.h. so, daß $G(x,-) \equiv 0$ für alle $x \in U$ gilt?

Sei $Q$ die $G$ entsprechende quadratische Form $Q(x) := G(x,x)$. Für welche Unterräume $U$ von $\mathbb{R}^2$ ist $Q_{|U} : U \to \mathbb{R}$ identisch Null, d.h. $q(u) = 0$ für alle $u \in U$?

LÖSUNG:

(a) Die Abbildung $f_x := F(x,.) : \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist genau dann identisch Null, wenn $x$ Eigenvektor von $A^T = A$ zum Eigenwert 0 ist.
Man sieht (1. + 2. = 3. Spalte), daß 0 Eigenwert von $A$ ist und ($\mathrm{rg}(A) = 2$) dessen geometrische Vielfachheit 1 ist. Der gesuchte Unterraum $U$ ist der Eigenraum zum Eigenwert 0 und wird daher z.B. von $(1,1,-1)^T$ erzeugt.

(b) Die $G$ entsprechende Matrix $B$ ist nichtsingulär, die Bilinearform also nicht entartet, bzw. es gibt keinen Unterraum mit der Eigenschaft aus a).

Zunächst führt man die Hauptachsentransformation durch. Die Eigenwerte von $B$ sind $-3$ und 2, die neuen Koordinaten seien (entsprechend den jeweiligen Eigenvektoren von $B$) $y_1 = -2x_1 + x_2$ und $y_2 = x_1 + 2x_2$. Die Matrix der Bilinearform bzgl. der neuen Koordinaten ist daher
$$B' = S^T B S = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$
Die Bedingung $Q(x,x) = 0$ wird damit zu $3y_1^2 = 2y_2^2$. Die gesuchten Teilräume sind daher die Ursprungsgeraden $y_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}y_1$ bzw. wieder in den ursprünglichen Koordinaten
$x_1 + 2x_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}(-2x_1 + x_2)$. Das + führt auf $(2 - \sqrt{\frac{3}{2}})x_2 = -2\sqrt{\frac{3}{2}}x_1 - x_1$ und schließlich auf $x_2 = -(13 + 5\sqrt{\frac{3}{2}})x_1$.

Im anderen Fall erhält man $x_2 = (5\sqrt{\frac{3}{2}} - 13)x_1$.

## Hausübungen

### (H 19) Adjungierte Abbildungen

Es sei $f : V \to W$ lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Beweisen Sie folgende aussagen:

(a) Ist $f$ injektiv, so $f^* : W^* \to V^*$ surjektiv.

(b) Ist $f$ surjektiv, so $f^* : W^* \to V^*$ injektiv.

(c) Ist $f$ ein Isomorphismus, so ist auch $f^* : W^* \to V^*$ ein Isomorphismus.

LÖSUNG:

(a) Es sei $f : V \to W$ injektiv. Wir wählen eine Basis $\mathcal{V} = (v_1, ldots, v_n)$ von $V$. Da die Abbildung $f$ injektiv ist, sind die Bilder $f(v_i)$ der Basisvektoren $v_i$ in $W$ linear unabhängig. Diese Menge ergänzen wir zu einer Basis $\mathcal{W} = (f(v_!), \ldots, f(v_n), w_1, \ldots, w_m)$ von $W$. Ist $L : V \to \mathbb{K}$ eine Linearform, so definiert die Vorschrift $f(v_i) \mapsto L(v_i)$, $w_j \mapsto 0$ eine Linearform $L'$ auf $W$. Nach Konstruktion gilt $f^*(L')(v_i) = L' \circ f(v_i) = L(v_i)$. Weil die Linearform $L$ durch die Werte auf den Basisvektoren eindeutig bestimmt ist, folgt $f^*(L') = L$. Somit liegt jede Linearform $L \in V^*$ im Bild von $f^*$, d.h. $f^*$ ist surjektiv.

(b) Es sei $f : V \to W$ surjektiv und $\mathcal{V} = (v_1, ldots, v_n)$ eine Bais von $V$. Weil $f$ surjektiv ist, gibt es eine Teilmenge $v_1, \ldots, v_m$ von $\mathcal{B}$, so daß das Bild $f(v_1), \ldots, f(v_m)$ eine Basis von $W$ bildet. Sind nun $L \in W^*$ und $L' \in W^*$ zwei Linearformen auf $W$ mit gleichem Bild $f^*L = f^*L'$ unter $f^*$, so gilt insbesondere auch $L(f(v_i)) = (f^*L)(v_i) = (f^*L')(v_i)$ für alle $0 \leq i \leq n$. Somit stimmen die Linearformen $L$ und $L'$ auf $W$ überein. Dies zeigt, daß die adjungierte Abbildung $f^*$ injektiv ist.

(c) Ist $f$ ein Isomorphismus, so ist $f$ injektiv und surjektiv. Somit ist $f^* : W^* \to V^*$ surjektib und injektiv, also ein Isomorphismus.

## (H 20) Bilinearformen

(a) Zeigen Sie, daß jede reelle Bilinearform die Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Bilinearform ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $f(v, w) = \frac{1}{2}[q(v + w) - q(v, v) - q(w, w)]$ für jede reelle quadratische Form $q$ bilinear und symmetrisch ist.

LÖSUNG:

(a) Ist $f : V \times V \to \mathbb{R}$ eine reelle Bilinearform, so werden durch $f_s(v, w) := \frac{1}{2}[f(v, w) + f(w, v)]$ und $f_a(v, w) := \frac{1}{2}[f(v, w) - f(w, v)]$ zwei Bilinearformen $f_s, f_a : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert. Nach Konstruktion ist $f_s$ symmetrisch und $f_a$ antisymmetrisch. Weiterhin gilt $f = f_s + f_a$.

(b)