Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

Sommersemester 2008
May 23, 2008

Lineare Algebra II

7. Übung

Gruppenübungen

(G 30)

(a) Seien $\mathbb{K}$ ein Körper $(=\mathbb{R},\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ und $J \in M_n(\mathbb{K})$ die Jordansche Normalform von A. Zeigen Sie, daß für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ die beiden Matrizen $J - \alpha E$ und $A - \alpha E$ denselben Rang haben.

(b) Bestimme den Rang von $A - E$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und zeige $(A - E)^2 = 0$. Bestimme aus diesen beiden Berechnungen die Jordansche Normalform von A.

(G 31) Euklidischer Algoritmus für Polynome

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und Sei $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{K})$ der Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$. Ein Polynome $q \in \mathcal{P}$ heist *Teiler* von $p \in \mathcal{P}$ wann es gibt $r \in \mathcal{P}$ so daß $p = rq$. Man schreibt $q|p$. Die Polynome q heißt *nicht-triviale Teiler* wenn der Grad von $q > 0$. Der *größte gemeinsamme Teiler* von zwei Polynome $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, $q = \mathrm{ggT}(p, q)$ ist definiert durch: $q|p_1$ und $q|p_2$ und wenn $r|p_1$ und $r|p_2$ folgt $r|q$.

Der *Euklidische algoritmus* für Polynome ist änlich wie für Zahlen. Sei $q_0, q_1 \in \mathcal{P}$ mit $Grad(q_0) > Grad(q_1)$. Für $n \geq 1$ definieren wir r_{n+1} und q_{n+1} recursive durch Division mit Rest:

$$q_{n-1} = q_n\, r_{n+1} + q_{n+1}.$$

Wann $q_{n+1} = 0$ brechen wir ab und $\mathrm{ggT}(q_0, q_1) = q_n$.

(a) Zeigen Sie, daß der obige algorithmus terminiert, d.h. es immer ein $N < \infty$ so daß $q_{N+1} = 0$ gibt.

(b) Berechnen Sie die $\mathrm{ggT}(p, q)$ für $p(x) = x^8 - 1$ und $q(x) = x^{15} - 1$.

(c) Die sogenannte *Fibonacci Polynome* sind durch $F_0(x) = 1$, $F_1(x) = x$ und

$$F_{m+1} = xF_m + F_{m-1},\ m \geq 1$$

definiert. Zeigen Sie, daß die Folge F_m die eigenschaft daß die Berechnung von $\mathrm{ggT}(F_m, F_{m+1})$ genau m Schritte benötigt (ohne Schritt 0) hat.

(d) Geben Sie F_2, F_3, F_4 an.

(e) Wie kann man die Fibonacci Zahlen, f_m von die Fibonacci Polynome, $F_m(x)$ bekommen?

(G 32) Bidualraum

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und V^* der Dualraum von V. Dann nennt man V^{**}, der Dualraum von V^*, der *Bidualraum* von V.

(a) Sei $v_1, \dots, v_n$ ein Basis für V und sei $v_i^* \in V^*$ definiert durch $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$. Zeigen Sie, daß $v_1^*, \dots, v_n^*$ ein Basis für V^* ist, die sogenannte *Dualbasis* bezügl. der Basis $v_1, \dots, v_n$.

(b) Zeigen Sie, daß für jedem $v \in V$ mit $v \neq 0$ ein $\varphi \in V^*$ so daß $\varphi(v) \neq 0$ gibt.

(c) Zeigen Sie, daß für jede $v \in V$ ein $\lambda_v \in V^{**}$ gibt so daß die Abbildung $v \mapsto \lambda_v$ ein Isomorphismus ist.

Hausübungen

(H 17) Spiegelung

(a) Zeige, daß eine Matrix genau dann diagonalizierbar ist, wenn für jeden Eigenwert der geometrische mit die algebraische Vielfachheit übereinstimmt.

(b) Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Eine endomorphismus $S : V \to V$ heißt *Spiegelung*, wenn $S^2 = E$ und $Rang(S - E) = 1$. Zeige, daß jede Spiegelung diagonalisierbar ist und bestimme ihr characteristisches Polynom.

(c) Sei

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}, \ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, daß $M(\varphi)$ ein Spiegelung ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel für ein Spegelung in $\mathbb{C}^4$ an.

(H 18)

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und V^* der Dualraum zum V. Ist $W \subseteq V$ ein Unterraum zum V, so heißt

$$W^0 = \{\varphi \in V^* \ : \ \varphi(w) = 0 \text{ für alle } w \in W\} \subseteq V^*$$

der zu W orthogonale Raum.

(a) Zeigen Sie, daß $W^0 \subseteq V^*$ ein Untervektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, daß wenn $w_1, \dots, w_k$ eine Basis von W ist und $w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_r$ ein Basis von V ist, dann ist $v_1^*, \dots, v_r^*$ eine Basis von W^0. Insbesondere gilt

$$\dim(W) + \dim(W^0) = \dim(V).$$

(c) Zeigen Sie, daß $(W^0)^0 = W$.

(d) Sei

$$W = \{(t, 0, 0) \ : \ t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie W^0.

(e) Seien $V = \mathbb{R}^5$, $v_1 = (1, 1, 1, 1, 1), v_2 = (5, 4, 3, 2, 1)$ und $W = \mathrm{Span}(v_1, v_2) \subseteq \mathbb{R}^5$. Geben Sie eine Basis für W^0 an.