**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

Sommersemester 2008
June 4, 2008

# Lineare Algebra II

## 7. Übung mit Lösungshinweisen

### Gruppenübungen

**(G 30)**

(a) Seien $\mathbb{K}$ ein Körper $(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ und $J \in M_n(\mathbb{K})$ die Jordansche Normalform von $A$. Zeigen Sie, daß für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ die beiden Matrizen $J - \alpha E$ und $A - \alpha E$ denselben Rang haben.

(b) Bestimme den Rang von $A - E$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und zeige $(A - E)^2 = 0$. Bestimme aus diesen beiden Berechnungen die Jordansche Normalform von $A$.

LÖSUNG:

(a) Sei $J = BAB^{-1}$. Dann gilt naturlich auch $J - \alpha E = B(A - \alpha E)B^{-1}$ und wir wissen daß Basistransformationen der Rang nicht veränderen. Also ist $Rang(J - \alpha E) = Rang(A - \alpha E)$.

(b)

$$\begin{aligned} A - E &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

so $Rang(A - E) = 2$.

Es ist auch einfach zu verifiziernen, daß

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(c) Aus (a) folgt daß die Eigenraum $V_1(A)$ hat Dimension zwei und aus (b) folgt daß die beide Jordanketten Lenge 2 haben. Also muss die Jordansche normalform von $A$ zwei blöcker haben, d.h.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**(G 31) Euklidischer Algoritmus für Polynome**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und Sei $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{K})$ der Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$. Ein Polynome $q \in \mathcal{P}$ heist *Teiler* von $p \in \mathcal{P}$ wann es gibt $r \in \mathcal{P}$ so daß $p = rq$. Man schreibt $q|p$. Die Polynome $q$ heißt *nicht-triviale Teiler* wenn der Grad von $q > 0$. Der *größte gemeinsamme Teiler* von zwei Polynome $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, $q = \mathrm{ggT}(p, q)$ ist definiert durch: $q|p_1$ und $q|p_2$ und wenn $r|p_1$ und $r|p_2$ folgt $r|q$.

Der *Euklidische algoritmus* für Polynome ist änlich wie für Zahlen. Sei $q_0, q_1 \in \mathcal{P}$ mit $Grad(q_0) > Grad(q_1)$. Für $n \geq 1$ definieren wir $r_{n+1}$ und $q_{n+1}$ recursive durch Division mit Rest:

$$q_{n-1} = q_n \, r_{n+1} + q_{n+1}.$$

Wann $q_{n+1} = 0$ brechen wir ab und $\mathrm{ggT}(q_0, q_1) = q_n$.

(a) Zeigen Sie, daß der obige algorithmus terminiert, d.h. es immer ein $N < \infty$ so daß $q_{N+1} = 0$ gibt.

(b) Berechnen Sie die $\mathrm{ggT}(p, q)$ für $p(x) = x^8 - 1$ und $q(x) = x^{15} - 1$.

(c) Die sogenannte *Fibonacci Polynome* sind durch $F_0(x) = 1$, $F_1(x) = x$ und

$$F_{m+1} = xF_m + F_{m-1}, \; m \geq 1$$

definiert. Zeigen Sie, daß die Folge $F_m$ die eigenschaft daß die Berechnung von $\mathrm{ggT}(F_m, F_{m+1})$ genau $m$ Schritte benötigt (ohne Schritt 0) hat.

(d) Geben Sie $F_2, F_3, F_4$ an.

(e) Wie kann man die Fibonacci Zahlen, $f_m$ von die Fibonacci Polynome, $F_m(x)$ bekommen?

LÖSUNG:

a) Mann sieht daß wenn $p, q \in \mathcal{P}$ und $p = qr + s$ mit $r, s \in \mathcal{P}$ dann folgt $Grad(s) < Grad(p)$. Also, in jede schritt in die Algoritmus haben wir $Grad(q_{n+1}) < Grad(q_n)$ und damit folgt das es gibt ein $N \geq 0$ so daß $q_N = 0$. (Erinnerien Sie daß bei Definition $Grad(0) = -\infty$.)

b) Sei $q_0 = x^{15} - 1$ und $q_1 = x^8 - 1$. In der erste Schritt haben wir

$$x^{15} - 1 = (x^8 - 1)x^7 + x^7 - 1$$

also $q_2 = x^7 - 1$. In der zweite Schritt haben wir

$$x^8 - 1 = (x^7 - 1)x + x - 1$$

also $q_3 = x - 1$. In der dritte Schritt haben wir

$$x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

also $q_4 = 0$ und $\mathrm{ggT}(q_0, q_1) = x - 1$.

c) Von die relation $F_{m+1} = xF_m + F_{m-1}$ sieht man daß die Grad von $F_n$ genau $n$ ist, also $Grad(F_{m-1}) = m-1$, $Grad(F_{m-2}) = m-2, \ldots, Grad(F_0()) = 0$. Damit dauert es genau $m-1$ Schritte bis die Grad von $F_{m-1}$ zum 0 reduciert ist, also $F_2(x) = xF_1(x) + F_0(x)$ denn kommt die letzte ($m$-te) Schritt $F_1(x) = F_0(x) + 0$.

d) $F_2(x) = x^2+1, F_3(x) = x^3+2x, F_4(x) = x^4+3x^2+1$

e) Es gilt offensichtlich daß $F_m(1) = f_m$.

### (G 32) Bidualraum

Sei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $V^*$ der Dualraum von $V$. Dann nennt man $V^{**}$, der Dualraum von $V^*$, der *Bidualraum* von $V$.

(a) Sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Basis für $V$ und sei $v_i^* \in V^*$ definiert durch $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$. Zeigen Sie, daß $v_1^*, \ldots, v_n^*$ ein Basis für $V^*$ ist, die sogenannte *Dualbasis* bezügl. der Basis $v_1, \ldots, v_n$.

(b) Zeigen Sie, daß für jedem $v \in V$ mit $v \neq 0$ ein $\varphi \in V^*$ so daß $\varphi(v) \neq 0$ gibt.

(c) Zeigen Sie, daß für jede $v \in V$ ein $\lambda_v \in V^{**}$ gibt so daß die Abbildung $v \mapsto \lambda_v$ ein Isomorphismus ist.

LÖSUNG:

a) Sei $\phi \in V^*$. Definiere $\lambda_i = \phi(v_i)$ und sei $\psi = \lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_n v_n^*$. Dann gilt $\psi(v_j) = \lambda_j = \phi(v_j)$ so $\phi$ und $\psi$ übereinstimmt auf einer Basis, d.h. $\phi = \psi$. Damit wird $V^*$ von $v_1^*, \ldots, v_n^*$ aufgespannt.

Und gilt $\lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_n v_n^* = 0$ so folgt durch Anwendung beider Seiten der Gleichung auf $v_i$

$$\lambda_i = \lambda_1 v_1^*(v_i) + \cdots + \lambda_n v_n^*(v_i) = 0(v_i) = 0.$$

Also ist $v_1^*, \ldots, v_n^*$ linear unabhängig. Und weil $\dim(V^*) = \dim(V) = n$ muss $v_1^*, \ldots, v_n^*$ ein Basis sein.

b) Sei $\{v_i\}_{i=1}^n$ und $\{v_i^*\}_{i=1}^n$ ein Basis von $V$ und der zugehöriger Dualbasis. Sei $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Weil $v \neq 0$ gibts $\lambda_i \neq 0$. Für $\varphi = v_i^*$ gilt dann $\varphi(v) = \lambda_i \neq 0$.

c) Für $L \in V^*, v \in V$ haben wir $L(v) \in \mathbb{R}$. Also können wir $\lambda_v : L \mapsto L(v)$ setzen, dann ist $\lambda_v \in V^{**}$. Dann gilt:

- Für $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ und $v_1, v_2 \in V$ haben wir $\lambda_{a_1v_1+a_2v_2}(L) = L(v_1+v_2) = L(v_1) + L(v_2) = \lambda_{v_1}(L) + \lambda_{v_2}(L)$ also $v \mapsto \lambda_v$ ist linear.
- Wenn $\lambda_v(L) = 0$ für jede $L \in V^*$ dann muss, wegen a), $v = 0$. Also ist $v \mapsto \lambda_v$ injektiv und weil $\dim(V) = \dim(V^*) = \dim(V^{**})$ ist $v \mapsto \lambda_v$ auch surjektiv, also ein Isomorphismus zwischen $V$ und $V^{**}$.

## Hausübungen

### (H 17) Spiegelung

(a) Zeige, daß eine Matrix genau dann diagonalizierbar ist, wenn für jeden Eigenwert der geometrische mit die algebraische Vielfachheit übereinstimmt.

(b) Sei $V$ ein $n$-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Eine endomorphismus $S: V \to V$ heißt *Spiegelung*, wenn $S^2 = E$ und $Rang(S - E) = 1$. Zeige, daß jede Spiegelung diagonalisierbar ist und bestimme ihr characteristisches Polynom.

(c) Sei
$$M(\varphi)=\left(\begin{array}{cc}\cos(\varphi) & \sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi)\end{array}\right),\ \varphi\in\mathbb{R}.$$
Zeigen Sie, daß $M(\varphi)$ ein Spiegelung ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel für ein Spegelung in $\mathbb{C}^4$ an.

LÖSUNG:

(a) Ist klar, weil die Jordansche Normalform genau dann diagonal ist wenn die algebraische und geometrische vielfachheit übereinstimmt für jede Eigenwert. (b) Die Eigenwerte von $S$ ist $\pm 1$. Weil die Rang von $A-E$ eins ist und die Determinante bleibt unverändert durch *Zeil*-operationen muss

$$p_A(t)=det(A-tE)=\left|\begin{array}{cccc}1-t & a & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-t & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1-t\end{array}\right|=-(1-t)^{n-1}(1+t).$$

(c) Es ist einfach zu verifizieren daß $M^2=E$ und $M-E$ rang 1 haben.

(d) Z.b.
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

**(H 18)**

Sei $V$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und $V^*$ der Dualraum zum $V$. Ist $W\subseteq V$ ein Unterraum zum $V$, so heißt

$$W^0=\{\varphi\in V^*\ :\ \varphi(w)=0 \text{ für alle } w\in W\}\subseteq V^*$$

der zu $W$ orthogonale Raum.

(a) Zeigen Sie, daß $W^0\subseteq V^*$ ein Untervektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, daß wenn $w_1,\dots,w_k$ eine Basis von $W$ ist und $w_1,\dots,w_k,v_1,\dots,v_r$ ein Basis von $V$ ist, dann ist $v_1^*,\dots,v_r^*$ eine Basis von $W^0$. Insbesondere gilt
$$\dim(W)+\dim(W^0)=\dim(V).$$

(c) Zeigen Sie, daß $(W^0)^0=W$.

(d) Sei
$$W=\{(t,0,0)\ :\ t\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^3.$$
Bestimmen Sie $W^0$.

(e) Seien $V=\mathbb{R}^5$, $v_1=(1,1,1,1,1)$, $v_2=(5,4,3,2,1)$ und $W=\operatorname{Span}(v_1,v_2)\subseteq\mathbb{R}^5$. Geben Sie eine Basis für $W^0$ an.

LÖSUNG:

(a) Sei $\phi_1, \phi_2 \in W^0$, $a, b \in \mathbb{K}$ und $\varphi = a\phi_1 + b\phi_2$. Dann gilt $\varphi(w) = a\phi_1(w) + b\phi_2(w) = a0 + b0 = 0$ für alle $w \in W$, also ist $W^0$ ein Untervektorraum.

(b) $v_1^*, \ldots, v_r^*$ ist ein Teilmenge von der dualen Basis $w_1^*, \ldots, w_k^*, v_1^*, \ldots, v_r^*$ also linear unabhängig. Es genügt also zu zeigen, daß $v_1^*, \ldots, v_r^*$ erzeugt $W^0$. Wegen

$$v_i^*(w_j) = 0, \text{ für } 1 \leq i \leq r, \text{ und } 1 \leq j \leq k$$

folgt daß $\mathrm{Span}(v_1^*, \ldots, v_r^*) \subseteq W^0$. Sei also $\varphi \in W^0$ gegeben. Dann ist

$$\varphi = \mu_1 w_1^* + \cdots + \mu_k w_k^* + \lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_r v_r^*$$

mit $\mu_i, \lambda_j \in \mathbb{K}$. Durch Anwendung auf $w_i$ bekommen wir

$$\varphi(w_i) = \mu_i = 0$$

also ist $\varphi \in \mathrm{Span}(v_1^*, \ldots, v_r^*)$ und damit $\mathrm{Span}(v_1^*, \ldots, v_r^*) = W^0$. Weider gilt naturlich $\dim(W) + \dim(W^0) = r + k = \dim(V)$.

(c) Es ist klar daß $(W^0)^0 \subseteq V^{**}$ und das $V^{**}$ mit $V$ identifizier ist (durch aufgabe G 32). Also, ist $w \in W$ und $\phi \in W^0$ dann gilt $w(\phi) = \phi(w) = 0$ also ist $w \in (W^0)^0$ und damit $W \subseteq (W^0)^0$. Aus (b) sehen wir daß $\dim((W^0)^0) = n - \dim(W^0) = n - (n - \dim(W)) = \dim(W)$ also gilt $(W^0)^0 = W$.

(d) Sei $\phi \in V^*$, dann gibt es $v \in \mathbb{R}^3$ so daß $\phi(x) = \langle x, v \rangle = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ (Aufgabe T5). Wenn $\phi \in W^0$ dann ist $\phi(t, 0, 0) = v_1$ also ist

$$W^0 = \{(0, y, z) \ : \ y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

die $yz$-Ebene.

(e) Wir muss nichts anderes machen als ein Basis für die Kern von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Berechnen. Ein Basis für die Lösungsmenge ist $w_1 = (1, -2, 1, 0, 0)$, $w_2 = (2, -3, 0, 1, 0)$, $w_3 = (3, -4, 0, 0, 1)$.