Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008 13. Mai 2008

Lineare Algebra II

6. Übung

Gruppenübungen

(G 27)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Weiter sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus und $P_f(X)$ dessen charakteristisches Polynom. Beweisen Sie: $P_f(X)$ ist irreduzibel (über $\mathbb{K}$), dann und nur dann, wenn $\{0\}$ und V die einzigen f-invarianten Teilräume von V sind.

(G 28)

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum (Dimension n) über einem Körper $\mathbb{K}$. Weiter seien f, g Endomorphismen von V. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Sind f und g beide diagonalisierbar und miteinander vertauschbar, so sind auch $f+g$ und $f \circ g$ diagonalisierbar.

(b) Sind f und g beide nilpotent und miteinander vertauschbar, so sind auch $f+g$ und $f \circ g$ nilpotent.

(c) Sind f und g von endlicher Ordnung und miteinander vertauschbar, so ist auch $f \circ g$ von endlicher Ordnung. (Vorsicht: $f+g$ muss nicht von endlicher Ordnung sein. Finden Sie ein Gegenbeispiel.)

(d) Finden Sie für jedes $n > 1$ ein Beispiel für nilpotente Endomorphismen f und g, für die $f \circ g$ nicht nilpotent ist.

(e) Finden Sie außerdem für $n = 2$ ein Beispiel, in welchem $f + g$ für zwei nilpotente Operatoren f, g nicht nilpotent ist.

(G 29)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und A eine $n \times n$ Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots\dots\dots & & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots\dots & -a_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

(a) Man zeige: Das charakteristische Polynom $P_A(X)$ hat die Form

$$P_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

(b) Zeigen Sie, dass der zum Eigenwert λ von A der zugehörige Eigenraum 1-dimensional ist.

(c) Nehmen Sie an, dass $P_A(X)$ über $\mathbb{K}$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Was können Sie über die Jordan-Normalform von A sagen?

Hausübungen

(H 16)

Betrachen Sie folgende Matrix A, die in Abhängigkeit von einem Parameter $c \in \mathbb{R}$ gegeben ist

$$A_c = \begin{pmatrix} 2 & -6c & c \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & c & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die beiden Parameterwerte c_1 und c_2, sodass A einen Eigenwert mit algebraischer Vielfacheit 2 hat.

(b) Bestimmen Sie jeweils für die beiden Parameterwerte c_1 und c_2 eine Basis des $\mathbb{R}^3$, in der A_c Jordan-Normalform hat und geben Sie geeignete Transformationsmatrizen an.

(H 17)

Betrachten Sie Matrizen $M(\phi) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ der folgenden Form

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

(a) Beschreiben Sie die geometrische Wirkung von $M(\phi)$ auf die (euklidsche) Ebene $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie: Für jedes ϕ ist $M(\phi)$ von endlicher Ordnung.

(c) Zeigen Sie, dass für zwei reelle Zahlen ξ, ψ, mit $\xi \not\equiv \psi \mod 2\pi$ (also $\psi - \xi \notin 2\pi\mathbb{Z}$) gilt

$$M(\xi)M(\psi) \neq M(\psi)M(\xi).$$

Beschreiben Sie die geometrische Wirkung von $M(\xi)M(\psi)$ und $M(\psi)M(\xi)$.

(d) Finden Sie nun ein Beispiel für (ξ, ψ), sodass $M(\xi)M(\psi)$ nicht von endlicher Ordnung ist.
(*Hinweis: Wie muss man eine reelle Zahl μ wählen, sodass $k\mu\pi$ für kein ganze Zahl k ein Vielfaches von 2π ist?*)