**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 19.05.2008

# Lineare Algebra II

## 6. Übung mit Lösungshinweisen

### Gruppenübungen

**(G 27)**

Sei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Weiter sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus und $P_f(X)$ dessen charakteristisches Polynom. Beweisen Sie: $P_f(X)$ ist irreduzibel (über $\mathbb{K}$), dann und nur dann, wenn $\{0\}$ und $V$ die einzigen $f$-invarianten Teilräume von $V$ sind.

LÖSUNG:

$\Leftarrow$: Wir nehmen an, dass $\{0\}$ und $V$ die einzigen $f$-invarianten Teilräume von $V$ sind.

Aus der Vorlesung ist folgender Satz bekannt: Gibt es eine Zerlegung $P_f(X) = P_1(X)P_2(X)$, mit $P_1(X), P_2(X)$ Polynomen $\in \mathbb{K}[X]$ vom Grad $\geq 1$, die zueinander koprim sind, so gibt es eine Zerlegung

$$V = V_1 \oplus V_2 \quad \text{mit} \quad V_i = \text{kern}\big(P_i(f)\big),\ i = 1, 2.$$

Da dabei auftretenden Räume sind $f$-invariant, d.h. $f(V_i) \subset V_i$, für $i = 1, 2$. Insbesondere folgt also aus $P_f(X)$ reduzibel (= nicht irreduzibel), dass es $f$-invariante Teilräume $\neq \{0\}$ und $\subsetneq V$ gibt (*Widerspruch* zur Annahme!). Also ist $P_f(X)$ irreduzibel.

$\Rightarrow$: Voraussetzung: $P_f(X)$ ist irreduzibel. Aus der Vorlesung ist folgende Aussage bekannt: Gibt es einen $f$-invarianten Teilraum $W \subset V$, dann ist das charakteristische Polynom von $f\mid_W$ ein Teiler von $P_f(X)$.

Wir nehmen nun an, es gibt einen solchen Teilraum $W$ und $W \neq \{0\}$, sowie $W \neq V$. Dann ist $P_{f|_W}(X) \neq P_f(X)$ (und nicht konstant) und somit ein echter Teiler von $P_f(X)$. Dann ist aber $P_f(X)$ nicht irreduzibel. *Widerspruch!*

**(G 28)**

Sei $V$ ein endlich dimensionaler Vektorraum (Dimension $n$) über einem Körper $\mathbb{K}$. Weiter seien $f$, $g$ Endomorphismen von $V$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Sind $f$ und $g$ beide diagonalisierbar und miteinander vertauschbar, so sind auch $f + g$ und $f \circ g$ diagonalisierbar.

(b) Sind $f$ und $g$ beide nilpotent und miteinander vertauschbar, so sind auch $f + g$ und $f \circ g$ nilpotent.

(c) Sind $f$ und $g$ von endlicher Ordnung und miteinander vertauschbar, so ist auch $f \circ g$ von endlicher Ordnung. (Vorsicht: $f + g$ muss nicht von endlicher Ordnung sein. Finden Sie ein Gegenbeispiel.)

(d) Finden Sie für jedes $n > 1$ ein Beispiel für nilpotente Endomorphismen $f$ und $g$, für die $f \circ g$ nicht nilpotent ist.

(e) Finden Sie außerdem für $n = 2$ ein Beispiel, in welchem $f + g$ für zwei nilpotente Operatoren $f$, $g$ nicht nilpotent ist.

LÖSUNG:

(a) Nach Voraussetzung sind $f$ und $g$ beide diagonalisierbar. Da $f$ und $g$ außerdem miteinander vertauschen, gibt es eine simultane Basis von Eigenvektoren, vergleiche etwa Aufgabe (T 4) (der Beweis dort ist genauso für euklidische Vektorräume über $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ wie für unitäre Vektorräume über $\mathbb{C}$ gültig). In dieser Basis habe die darstellenden Matrizen von $f$, $g$ Diagonalgestalt. Dann haben aber auch die darstellenden Matrizen von $f \circ g$ und $f + g$ Diagonalgestalt.

(b) Nach Voraussetzung sind $f$, $g$ nilpotent, d.h. es gibt ganze Zahlen $l$, $m$, so dass $f^l = 0$ und $g^m = 0$. Also gilt

$$\begin{aligned}(fg)^{\mathrm{kgV}(l,m)} &= \underbrace{(fg) \circ \cdots \circ (fg)}_{\mathrm{kgV}(l,m)\text{-mal}} \overset{f \circ g = g \circ f}{=} \underbrace{f \circ \cdots f}_{\mathrm{kgV}(l,m)\text{-mal}} \circ \underbrace{g \circ \cdots g}_{\mathrm{kgV}(l,m)\text{-mal}} \\ &= f^{\mathrm{kgV}(l,m)} g^{\mathrm{kgV}(l,m)} = \left(f^l\right)^{r_1} \circ \left(g^m\right)^{r_2} = 0,\end{aligned}$$

wobei $r_1$, $r_2$ ganze Zahlen sind.

Man überlegt sich zunächst, dass der binomische Satz für miteinander kommutierende Endomorphismen genauso gilt, wie man es für Zahlen gewohnt ist,

$$(f+g)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} f^{N-k} g^k,$$

da es bei den Summanden nicht auf die Reihenfolge ankommt.

**Beweis** (per Induktion): Induktionsverankerung:

$$(f+g)^1 = f + g$$

Induktionschritt ($N \longrightarrow N+1$):

$$(f+g)(f+g)^N = (f+g) \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} f^{N-k} g^k =$$

$$= \binom{N}{N} f\, f^N + \sum_{k=1}^{N} \left( \binom{N}{k} f\, f^{N-k} g^k + \binom{N}{(k-1)} f^{N-(k-1)} g^{k-1} g \right) = \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} f^{N+1-k} g^k.$$

(Hier wird die Vertauschbarkeit benötigt wird.)

Nun betrachtet man

$$(f+g)^{l+m} = \sum_{k=0}^{l-m} \binom{l+m}{k} f^{l+m-k} g^k.$$

Solange $0 \leq k \leq m$, gilt $f^{l+m-k} = f^{m-k} f^l = 0$. Ist andererseits $k > m$, so ist $g^k = g^m g^{k-m} = 0$. Somit verschwinden alle Summanden.

(c) Der Beweis läuft analog zu der entsprechenden Aufgabe in Teil (b): Nach Voraussetzung gibt es $l$, $m \in \mathbb{Z}$, sodass $f^l = id$ und $g^m = id$. Dann ist

$$(fg)^{\mathrm{kgV}(l,m)} = f^{\mathrm{kgV}(l,m)} g^{\mathrm{kgV}(l,m)} = id,$$

weil $f$, $g$ vertauschbar sind.

Nun noch ein Beispiel, welches zeigt, dass für $f$, $g$ von endlicher Ordnung und vertauschbar $f+g$ nicht von endlicher Ordnung sein muss: Man wählt $f = id$ und $g = -id$. Beide sind von endlicher Ordnung $f^1 = id$ und $g^2 = id$ und kommutieren, aber $f+g = 0$ ist nicht von endlicher ORdnung.

(d)

- Einfache Gegenbeispiele für (b) sind etwa Nilpotente Matrizen der Form

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots\dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots\dots & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ & \dots\dots\dots & & & 0 \end{pmatrix}, \dots .$$

$$\text{und} \quad g = f^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \dots$$

Ist $\dim V = n$, also $f$, $g$ sind $n \times n$-Matrizen dieser Bauart, so gilt nämlich

$$f \circ g = \begin{pmatrix} E_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \dots \end{matrix} & 0 \end{pmatrix} \neq \quad g \circ f = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} \dots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots \\ 0 \end{matrix} & E_{n-1} \end{pmatrix},$$

diese Matritzen sind aber offensichtlich nicht nilpotent. (e) Seien $f$, $g$ wie in der Lösung zu (d). Für $n = 2$ gilt

$$f + g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{was wegen} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = E_2$$

nicht nilpotent ist.

**(G 29)**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A$ eine $n \times n$ Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots\dots\dots & & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots\dots & -a_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

(a) Man zeige: Das charakteristische Polynom $P_A(X)$ hat die Form

$$P_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0.$$

(b) Zeigen Sie, dass der zum Eigenwert $\lambda$ von $A$ der zugehörige Eigenraum 1-dimensional ist.

(c) Nehmen Sie an, dass $P_A(X)$ über $\mathbb{K}$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Was können Sie über die Jordan-Normalform von $A$ sagen?

LÖSUNG:

(a) Am besten geht man induktiv vor: Für $n = 2$ ist

$$\det\bigl(XE - A\bigr) = \begin{vmatrix} X & a_0 \\ -1 & X - (-a_1) \end{vmatrix} = X^2 + a_1 X + a_0.$$

**Induktionsschritt** $(n \to n+1)$: Sei $A$ eine $n \times n$- Matrix, wie in der Aufgabenstellung und $A'$ eine $(n+1) \times (n+1)$-Matrix der Form

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & -a' \\ 1 & & \\ \vdots & \text{\Large $A$} & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom erhält man aus

$$P_{A'}(X) = \det\bigl(XE_{n+1} - A'\bigr) = \begin{vmatrix} X & \dots & a' \\ -1 & & \\ \vdots & (XE_n - A) & \\ 0 & & \end{vmatrix}.$$

Entwickeln nach der 1ten Zeile ergibt

$$\begin{aligned} P_{A'}(X) &= X \det\bigl(XE_n - A\bigr) + (-1)^{(n+1)-1} a' \begin{vmatrix} -1 & X & \dots & 0 \\ 0 & \dots\dots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots\dots & & X \\ 0 & \dots\dots & & -1 \end{vmatrix} \\ &= X P_A(X) + (-1)^n a' (-1)^n = X^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} X^{n-k+1} + a', \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung über $P_A(X)$ eingeht. Damit hat $P_{A'}(X)$ bereits die behauptete Form (setze $a'_k = a_{k-1}$ für $k = 1, \dots, n$ und $a'_0 = a'$).

(b) Der Rang der Matrix

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & \dots\dots\dots & & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots\dots & -a_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \tag{1}$$

ist $n - 1$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wenn $a_0 \neq 0$. Ist $\lambda \neq 0$ also ein Eigenwert von $A$, so hat $ker(A - \lambda E)$ Dimension 1. Die 0 tritt wiederum dann und nur dann als Eigenwert von $A$ auf, wenn $a_0 = 0$ verschwindet ($a_0$ ist nach (a) das konstante Glied des charakteristischen Polynoms). In diesem Fall ist aber

$$A - \lambda E = A = \begin{pmatrix} 0 & \dots\dots\dots & & 0 \\ 1 & 0 & \dots\dots & -a_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

ebenfalls eine Matrix mit Rang $n-1$. Auch hier ist also der Eigenraum eindimensional.

*Lösungsalternative:* Anhand der Form von $A-\lambda E$ aus (1) kann man in der Gleichung

$$\big(A-\lambda E\big)v=0$$

für einen Eigenvektor $v=(v_1,\dots,v_n)^t$ schrittweise jede Komponente $v_1,\dots,v_{n-1}$ eliminieren und durch $v_n$ ausdrücken:

$$\begin{aligned}
v_{n-1} &= (\lambda+a_{n-1})v_n, && \text{(Zeile } n\text{)}\\
v_{n-2} &= \lambda v_{n-1}+a_{n-2}v_n && \text{(Zeile } n-1\text{)}\\
&= \left(\lambda^2+\lambda a_{n-1}+a_{n-2}\right)v_n\\
&\dots\\
v_1 &= \lambda v_2+a_1v_n && \text{(Zeile } 2=n-(n-2)\text{)}\\
&= \cdots\\
&= \left(\lambda^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{k-1}a_k\right)v_n.
\end{aligned}$$

(Die Zeile 1 lautet

$$0=\lambda v_1+a_0v_n=\left(\lambda^n+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^k a_k+a_0\right)v_n=\underbrace{P_A(\lambda)}_{0}v_n,$$

und bringt somit keine neue Relation zwischen $v_1$ und $v_n$.) Alle Komponten von $v$ sind also Vielfache von $v_n$, der Eigenraum ist somit eindimensional.(Dies bleibt richtig, wenn alle $a_i=0$ sind. In diesem Fall ist $v_1=\dots v_{n-1}=0$ und $v_n$ ist frei wählbar.)

(c) Über die Jordan-Normalform kann man zumindest folgendes sagen: Zu jedem Eigenwert $\lambda$ kann nur ein Jordan-Kästchen auftreten.

## Hausübungen

**(H 16)**

Betrachen Sie folgende Matrix $A$, die in Abhängigkeit von einem Parameter $c\in\mathbb{R}$ gegeben ist

$$A_c=\begin{pmatrix}2 & -6c & c\\ 0 & -1 & 0\\ -\frac{1}{2} & c & 3\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die beiden Parameterwerte $c_1$ und $c_2$, sodass $A$ einen Eigenwert mit algebraischer Vielfacheit 2 hat.

(b) Bestimmen Sie jeweils für die beiden Parameterwerte $c_1$ und $c_2$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$, in der $A_c$ Jordan-Normalform hat und geben Sie geeignete Transformationsmatrizen an.

LÖSUNG:

(a) Die Eigenwerte von $A_c$ sind durch die Gleichung

$$\begin{aligned}
0=P_{A_c}(\lambda)=\det\big(\lambda E-A\big)&=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 6c & -c\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ \frac{1}{2} & -c & \lambda-3\end{vmatrix}\\
&=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)+\frac{c}{2}(\lambda+1)=(\lambda+1)\left(\lambda^2-5\lambda+6+\frac{c}{2}\right)
\end{aligned}$$

gegeben. Ein Eigenwert ist also $\lambda_1 = -1$. Weitere Eigenwerte hängen von $c$ ab.

Wenn die Diskriminante des quadratischen Faktors von $P_{A_c}(\lambda)$,

$$d := 25 - 4\left(6 + \frac{c}{2}\right) = 1 - 2c,$$

verschwindet, so trägt dieser eine doppelte Nullstelle bei. Dies ist für $c = 1/2$ der Fall. Also setzen wir

$$c_1 := \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2}(-5 \pm 0) = \frac{5}{2}.$$

Sonst ist es noch möglich, dass eine der beiden (reellen) Nullstellen des quadratischen Faktors $-1$ ist, also $P_{A_c}(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - \lambda_2)$. (Voraussetzung dafür ist natürlich $d > 0$). Diese Nullstellen sind durch

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(+5 \pm \sqrt{d}\right)$$

gegeben. Da $\sqrt{d} > 0$, muss

$$-1 = \lambda_- = \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{d}\right)$$

gelten, also $\sqrt{d} = 7$ und somit $d = 1 - 2c = 49$, also hat man

$$c_2 := -\frac{48}{2} = -24, \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \lambda_+ = \frac{1}{2}(5 + 7) = 6,$$

für den zweiten, einfachen, Eigenwert.

(b) Aus den Überlegungen in Teil (a) wissen wir, dass für $c = c_1$, $c_2$ jeweils eine Jordan-Normalform der Matrix $A_c$ existiert, da sich die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte zu 3 summieren. Wir bestimmen nun jeweils eine Jordanbasis für $A_c$.

Zunächst für $c_1 = 1/2$:

$$A_{1/2} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen als erstes einen Eigenvektor $w$ zu dem einfachen Eigenwert $\lambda_1 = -1$:

$$\left(A_{1/2} + E\right)w = \begin{pmatrix} 3 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Man sieht sofort $w_3 = 0$, $w_1 = w_2$ also ist $w = \left(1, 1, 0\right)^t$ ein Eigenvektor.

Nun benötigen wir eine Basis für den verallgemeinerten Einenraum zu dem doppelten Eigenwert $\lambda_2 = \frac{5}{2}$. Wir bestimmen zunächst einen Eigenvektor $v$ aus der Gleichung

$$\left(A_{1/2} - \frac{5}{2}E\right)v = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Offenbar muss $v_2 = 0$ gelten, sowie $v_1 = v_2$. Also ist $w = \left(1, 0, 1\right)^t$ ein Eigenvektor.

Einen Hauptvektor $u$, also einen Vektor, der von $B$ auf $v$ abgebildet wird, bestimmt man nun aus der Gleichung

$$Bu = v, \quad \text{also} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $u_2 = 0$, $-u_1 + u_3 = 1$. Ein mögliches $u$ ist also durch $u = \big(1, 0, 3\big)^t$ gegeben. Damit hat man eine zyklische Basis des Eigenraums $V^2_{5/2}(\lambda)$.

In der Basis $w$, $u$, $v$ hat $A$ also Jordan Normalform. Wir setzen die Basisvektoren in die Spalten der Transformationsmatrix $S$ ein und rechnen nach:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Nun für $c_2 = -24$:

$$A_{-24} = \begin{pmatrix} 2 & 144 & -24 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -24 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen einen Eigenvektor $w$ für den einfachen Eigenwert 6:

$$\big(A_{-24} - 6E\big)w = \begin{pmatrix} -4 & 144 & -24 \\ 0 & -7 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -24 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Offenbar ist $w_2 = 0$ und $v_1 + 6v_3 = 0$. Eine Lösung ist also durch $w = \big(-6, 0, 1\big)^t$ gegeben.

Nun zu dem doppelten Eigenwert $-1$: Die Gleichung

$$\big(A_{-24} + E\big)v = \begin{pmatrix} 3 & 144 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -24 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

hat die Lösungsmenge

$$\left\{ s\begin{pmatrix} -48 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,|s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit von $-1$ ist also zwei, somit ist die Jordan-Normalform von $A_{-24}$ die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Eine Jordan-Basis für $A_{-24}$ ist durch $(-48, 1, 0)^t$, $(8, 0, 1)^t$ und $(-6, 0, 1)^t$ gegeben. Als Transformationsmatrizen hat man dann

$$S = \begin{pmatrix} -48 & 8 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 0 & 14 & 0 \\ 1 & 48 & 6 \\ -1 & -48 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} S^{-1}A_{-24}S &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 0 & 14 & 0 \\ 1 & 48 & 6 \\ -1 & -48 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 144 & -24 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -24 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -48 & 8 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 0 & -14 & 0 \\ -1 & -48 & -6 \\ -6 & -12\cdot 24 & 48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -48 & 8 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**(H 17)**

Betrachten Sie Matrizen $M(\phi) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ der folgenden Form

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

(a) Beschreiben Sie die geometrische Wirkung von $M(\phi)$ auf die (euklidsche) Ebene $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $\phi$ ist $M(\phi)$ von endlicher Ordnung.

(c) Zeigen Sie, dass für zwei reelle Zahlen $\xi$, $\psi$, mit $\xi \not\equiv \psi \mod \pi$ (also $\psi - \xi \notin 2\pi\mathbb{Z}$) gilt

$$M(\xi)M(\psi) \neq M(\psi)M(\xi).$$

Beschreiben Sie die geometrische Wirkung von $M(\xi)M(\psi)$ und $M(\psi)M(\xi)$.

(d) Finden Sie nun ein Beispiel für $(\xi, \psi)$, sodass $M(\xi)M(\psi)$ nicht von endlicher Ordnung ist.
(*Hinweis: Wie muss man eine reelle Zahl $\mu$ wählen, sodass $k\mu\pi$ für kein ganze Zahl $k$ ein Vielfaches von $2\pi$ ist?*)

LÖSUNG:

(a) $M(\phi)$ wirkt als Spiegelung der Ebene. Genauer beschreibt $M(\phi)$ die Spiegelung an einer Gerade durch den Ursprung, die mit der $x$-Achse den Winkel $\phi/2$ einschließt.

Um dies zu sehen, kann man etwa die Bilder der Vektoren $(1,0)^t$ und $(0,1)^t$ berechnen,

$$M(\phi)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad M(\phi)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\phi) \\ -\cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Außerdem überprüft man leicht, dass $\det(M(\phi)) = -\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) = -1$ und $M(\phi)$ orthogonal ist (vgl. (b)).

(b) $M(\phi)$ ist von endlicher Ordnung, es ist es sogar eine Involuion:

$$\begin{aligned} M(\phi)M(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) & \cos(\phi)\sin(\phi) - \sin(\phi)\cos(\phi) \\ \sin(\phi)\cos(\phi) - \cos(\phi)\sin(\phi) & \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

(Da $M(\phi)$ symmetrisch ist, ist damit auch gezeigt, dass $M(\phi)^t = M(\phi)^{-1}$, und somit, dass $M(\phi)$ orthogonal ist.)

(c) Bezeichne mit $D_1$, $D_2$ die Matrizen $D_1 = M(\psi)M(\xi)$ und $D_2 = M(\xi)M(\psi)$. Für die Anschließende Rechnung werden folgende Formeln benötigt:

$$\begin{aligned} \cos(\xi + \psi) &= \cos(\xi)\cos(\psi) + \sin(\xi)\sin(\psi), \\ \sin(\xi + \psi) &= \cos(\xi)\sin(\psi) + \sin(\xi)\cos(\psi). \end{aligned}$$

(Diese dürften hinläglich bekannt sein, man kann sie sich aber auch jederzeit aus $e^{i(\xi+\psi)} =$

$(\cos\xi + i\sin\xi)(\cos\psi + i\sin\psi)$ herleiten.) Damit ist

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\xi & \sin\xi \\ \sin\xi & -\cos\xi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\xi - \sin\psi\sin\xi & \cos\psi\sin\xi - \sin\psi\cos\xi \\ -\cos\psi\sin\xi + \sin\psi\cos\xi & \cos\psi\cos\xi - \sin\psi\sin\xi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\psi-\xi) & \sin(\psi-\xi) \\ -\sin(\psi-\xi) & \cos(\psi-\xi) \end{pmatrix}, \\
D_2 &= \begin{pmatrix} \cos\xi & \sin\xi \\ \sin\xi & -\cos\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\xi-\psi) & \sin(\xi-\psi) \\ -\sin(\xi-\psi) & \cos(\xi-\psi) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Man sieht sofort $D_1 \neq D_2$, sofern $\psi \not\equiv \xi \mod \pi$. Offenbar handelt es sich bei $D_1$ und $D_2$ um Drehmatrizen, die jeweils eine Drehung um einen Winkel $\psi - \xi$ und $\xi - \psi$ (in positiver Richtung) vermitteln. (Damit ist auch klar, dass $D_1 = D_2^{-1}$, was natürlich auch schon aus (b) folgt.)

(d) Die Drehmatrix $D_1 = M(\xi)M(\psi)$ ist genau dann von endlicher Ordnung, wenn $D_1^k = E_2$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn die von $D_1^k$ beschriebene Drehung ein Vielfaches einer Drehung um $2\pi$ ist. Also gilt

$$D_1^k = E_2 \quad \Leftrightarrow \quad k(\psi - \xi) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

**Behauptung:** Wählt man $\psi$, $\xi$ so, dass

$$\mu := \frac{\psi - \xi}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

so ist $D_1^k \neq E_2$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$.
**Beweis:** $D_1^k = E_2$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn $k(\psi - \xi) \in 2\pi\mathbb{Z}$, also wenn $k\mu \in 2\mathbb{Z}$, also wenn $\mu \in \frac{2}{k}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Aber $\mu \notin \mathbb{Q}$. *Widerspruch!* Es gibt also kein solches $k$.

Da $D_2$ die Drehung um den Winkel $(\xi - \psi) = -\mu\pi$ vermittelt, ist damit auch gezeigt, dass $D_2$ ebenfalls nicht von endlicher Ordnung ist.

Nun kann man beliebig viele Beispiele angeben z.B. wähle man

$$\psi = \frac{3}{5}\sqrt{2}\pi, \quad \xi = \frac{2}{5}\sqrt{2}\pi.$$

Dann vermitteln $D_1$ und $D_2$ jeweils Drehungen um den irrationalen Winkel $\frac{\pi\sqrt{2}}{5}$, im positiven und im negativen Drehsinn, und sind nach der eben bewiesenen Behauptung nicht von endlicher Ordnung.

*Bemerkung:* Natürlich genügt es zur Lösung der Aufgabe, wenn man nur für ein konkretes Paar $\psi$, $\xi$ zeigt, dass die Produkte der Matrizen $M(\psi)$ und $M(\xi)$ nicht von endlicher Ordnung sind, statt eine allgemeine Aussage zu beweisen.