Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Erik Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008 6.10.2007

Lineare Algebra II

5. Übung

Gruppenübungen

(G 21) Jordan-Normalform

Zeigen Sie, daß die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
in $\mathbb{R}$ keine Jordannormalform besitzt.

(G 22) Das Minimalpolynom

Definition: Ein *Minimalpolynom* eines Endomorphismus $f \in \hom(V,V)$ (V endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$) ist ein nichttriviales Polynom $m_f \in \mathbb{K}[X]$ kleinsten Grades mit Leitkoeffizient 1, für welches $p(f) = 0$ gilt.

Beweisen Sie, daß Minimalpolynome eindeutig sind und daß das Minimalpolynom immer existiert.

(G 23) Jordan-Normalform

Transformieren Sie die folgendende Matrix auf Jordannormalform.
$$A := \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie hierzu die verallgemeinerten Eigenräume.

(G 24) Komplexe 2x2-Matrizen

Zeigen Sie, daß eine komplexe nicht nilpotente 2×2–Matrix A eine Quadratwurzel hat, d.h. daß eine komplexe 2×2–Matrix B mit $B^2 = A$ existiert.

Hinweis: Betrachten Sie die möglichen Jordannormalformen von A.

(G 25) Jordan-Normalform

Bestimmen Sie jeweils eine Jordannormalform und eine zugehörige Jordanbasis der Matrizen
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hausübungen

(H 13) Jordan-Normalform (10 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils eine Jordannormalform der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(H 14) Berechneung von e^{At} (10 Punkte)

In dieser Aufgabe werden wir uns überlegen, wie man zu einer $n \times n$-Matrix A ihr Bild unter der Exponentialfunktion berechnet.

(a) Berechnen Sie e^{At} für eine Diagonalmatrix A.

(b) Berechnen Sie e^{At} für einen Jordanblock.

Hinweis: Zerlegen Sie A zu $A = \lambda E + N$, mit N nilpotent.

(c) Wie kann man e^{At} für eine diagonalisierbare Matrix berechnen?

(H 15) Jordan-Normalform (10 Punkte)

Lösen Sie Aufgabe G25.