Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Erik Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008 6.10.2007

Lineare Algebra II

5. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 21) Jordan-Normalform

Zeigen Sie, daß die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}$ keine Jordannormalform besitzt.

LÖSUNG:

Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1.$$

Folglich besitzt A keine reellen Eigenwerte und daher auch keine Jordannormalform in $\mathbb{R}$.

(G 22) Das Minimalpolynom

Definition: Ein *Minimalpolynom* eines Endomorphismus $f \in \hom(V, V)$ (V endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$) ist ein nichttriviales Polynom $m_f \in \mathbb{K}[X]$ kleinsten Grades mit Leitkoeffizient 1, für welches $p(f) = 0$ gilt.

Beweisen Sie, daß Minimalpolynome eindeutig sind und daß das Minimalpolynom immer existiert.

LÖSUNG:

Es sei $f \in \hom(V, V)$ ein endomorphismus mit charakteristischem Polynom $P_f \in \mathbb{K}[X]$. Aus $P_f(f) = 0$ folgt die Existenz eines nichttrivialen Polynomes $p \in \mathbb{K}[X]$ minimalen Grades mit $p(f) = 0$. Ist $c \in \mathbb{K}$ der Leitkoeffizient von p, so ist $m_f = \frac{1}{c}p$ ein Polynom $m_f \in \mathbb{K}[X]$ kleinsten Grades mit Leitkoeffizient 1 für welches $p(f) = 0$ gilt. es bleibt noch die eindeutigkeit zu beweisen. Sind p_1 und p_2 jeweils Minimalpolynome vom Grad n so gilt

$$(p_1 - p_2)(f) = p_1(f) - p_2(f) = 0,$$

somit ist $p_1 - p_2$ ein Polynom vom Grad $n - 1$, für welches $(p_1 - p_2)(f) = 0$ gilt. Im Falle $p_1 \neq p_2$ steht dies im Widerspruch zur Annahme, daß der Grad von p_1 (oder auch p_2) minimal unter der Bedingung $p_1(f) = 0$ ist.

(G 23) Jordan-Normalform

Transformieren Sie die folgendende Matrix auf Jordannormalform.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie hierzu die verallgemeinerten Eigenräume.

LÖSUNG:

Das charakteristische Polynom ist

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (\lambda - 2)^3.$$

Um die Eigenvektoren zum Eigenwert 2 zu bestimmen, lösen wir das folgende Gleichungssystem:

$$(A - 2E_3)v_1 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} v_1 = 0.$$

Der Lösungsraum (ist der gewöhnliche Eigenraum und) hat Dimension eins und wird von $v_1 := (2, 1, -2)^T$ erzeugt. Als nächstes suchen wir einen Vektor v_2, der durch $A - 2E_3$ auf v_1 abgebildet wird (Denn dann gilt $(A - 2E_3)^2 v_2 = 0$ und $\{v_1, v_2\}$ ist eine linear unabhängige Teilmenge des verallgemeinerten Eigenraums $V_2^2(A) = \ker(2E - A)^2$):

$$(A - 2E_3)v_2 = v_1.$$

Der affine Lösungsraum hat Dimension eins, z.B. $v_2 := (1, 0, -1)^T$. Analog suchen wir nun einen Vektor v_3, der durch $A - 2E_3$ auf v_2 abgebildet wird:

$$(A - 2E_3)v_3 = v_2.$$

Eine Lösung ist $v_2 := (-\frac{1}{2}, 0, 0)^T$.

Damit haben wir eine Basis des verallgemeinerten Eigenraums $V_2^3(A)$ (der damit als $\mathbb{R}^3$ bestimmt ist) gefunden, die bereits eine Jordanbasis ist.

Im Allgemeinen kann es auch passieren, daß eine der Gleichungen $(A - 2E_3)v_{i+1} = v_i$ nicht lösbar ist. Dann müßte man trotzdem $\{v_1, \ldots, v_i\}$ zu einer Basis $\{v_1, \ldots, v_k\}$ des verallgemeinerten Eigenraums $U^{(2)}$ erweitern und aus den Jordanketten zu $v_i, \ldots, v_k$ eine Jordanbasis von $V_2^2(A)$ konstruieren. (Man muß erst bei v_i beginnen, da die Jordankette von v_i offenbar die Vektoren $v_1, \ldots v_{i-1}$ und damit auch deren Jordanketten enthält).

Man sollte sich darüber im klaren sein, daß insbesondere der Fall, in dem die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts größer als 1 ist, eine sorgfältigere Behandlung erfordert, die hier jedoch aus Zeitgründen nicht geübt werden soll.

Nun setzen wir (die erste Spalte ist der Eigenvektor der Jordankette usw.)

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(G 24) Komplexe 2x2-Matrizen

Zeigen Sie, daß eine komplexe nicht nilpotente 2×2–Matrix A eine Quadratwurzel hat, d.h. daß eine komplexe 2×2–Matrix B mit $B^2 = A$ existiert.

Hinweis: Betrachten Sie die möglichen Jordannormalformen von A.

LÖSUNG:

Es sei A zunächst eine komplexe nicht nilpotente 2×2–Matrix in Jordannormalform. Dann ergeben sich zwei Fälle:

1.: $A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. ($\lambda_1 = \lambda_2$ ist möglich.) Dann können wir komplexe Quardatwurzeln μ_1 und μ_2 von λ_1 und λ_2 wählen und mit

$$B := \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

gilt $B^2 = A$.

2.: $A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Sei wieder μ eine komplexe Quadratwurzel von λ und

$$B := \begin{pmatrix} \mu & \frac{1}{2\mu} \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Dann gilt wiederum $B^2 = A$.

Sei jetzt A eine beliebige komplexe 2×2–Matrix und $S^{-1}AS$ ihre Jordannormalform. Sei B die Matrix, für die $B^2 = S^{-1}AS$ gilt (s.o). Dann ist

$$(SBS^{-1})^2 = SBS^{-1}SBS^{-1} = SBBS^{-1} = SS^{-1}ASS^{-1} = A,$$

also ist SBS^{-1} die gesuchte Quadratwurzel.

(G 25) Jordan-Normalform

Bestimmen Sie jeweils eine Jordannormalform und eine zugehörige Jordanbasis der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{3. Zeile}}}{=} (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &\overset{\substack{\text{Entwicklung} \\ \text{nach der} \\ \text{1. Zeile}}}{=} (2-\lambda)(3-\lambda)\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)^2. \end{aligned}$$

Folglich besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$, die jeweils die algebraische Vielfachheit zwei haben. Da die Summe der algebraischen Vielfachheiten gleich vier ist, besitzt A eine Jordannormalform.

Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_1 gilt

$$E_1 := \ker(A - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich gibt es zum Eigenwert λ_1 zwei Jordanblöcke der Größe eins.

Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_2 gilt

$$E_2 := \ker(A - \lambda_2 I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich gibt es zum Eigenwert λ_2 einen Jordanblock der Größe zwei.

Zum Bestimmen des noch fehlenden Basisvektors des verallgemeinerten Eigenraums zum Eigenwert λ_2 ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$(A - \lambda_2 I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystem ist

$$\left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit ist

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von A und

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.

Alternativ hätte auch das Verfahren aus der Vorlesung verwendet werden können. Dann hätte man nach der Berechnung von $\ker(A - \lambda_2 I)$

$$\ker(A - \lambda_2 I)^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

berechnet und festgestellt, daß $((0,1,0,0)^T,(1,0,0,1)^T)$ die fehlende Jordankette ist.

Für das charakteristische Polynom von B gilt

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) = \det(B-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach der}\\ \text{1. Zeile}}}{=} (-1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entwicklung}\\ \text{nach der}\\ \text{3. Zeile}}}{=} (-1-\lambda)^2\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1-\lambda)^4
\end{aligned}$$

Folglich besitzt B den Eigenwert $\lambda_1 = -1$ mit der algebraischen Vielfachheit vier, womit B eine Jordannormalform besitzt.

Da B nur einen Eigenwert besitzt, gibt es auch nur einen verallgemeinerten Eigenraum, womit $V^{\lambda_1} = \mathbb{R}^4$ gilt.

Mit dem Verfahren aus der Vorlesung kommt man nun sehr schnell zum Ziel, da das Berechnen von $\ker(B+I)^j$ entfallen kann. Als Basis des verallgemeinerten Eigenraums zur Eigenwert -1 kann zum Beispiel die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ gewählt werden. Daraus lassen sich nun Jordanketten bilden.

Es sei

$$v_3 := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 := (B+I)v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 := (B+I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_0 := (B+I)v_1 = 0$$

Aus $v_0 = 0$ folgt, daß v_1 ein Eigenvektor ist und v_3 ein Hauptvektor der Stufe 3. Daher ist (v_1, v_2, v_3) eine Jordankette.

Weiter sei

$$w_1 := e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_0 := (B+I)w_1 = 0$$

Aus $w_0 = 0$ folgt, daß w_1 ein Eigenvektor ist. Daher ist (w_1) eine Jordankette. Allerdings sind v_1 und w_1 linear abhängig, weshalb die Jordankette (w_1) gleich wieder verworfen werden kann.

Nun sei

$$u_2 := e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_1 := (B+I)u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_0 := (B+I)u_1 = 0$$

Aus $u_0 = 0$ folgt, daß u_1 ein Eigenvektor ist. Daher ist (u_1, u_2) eine Jordankette.

Die Vektoren $(v_1, v_2, v_3, u_1, u_2)$ bilden offensichtlich ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$. Allerdings bilden sie keine Basis. Deshalb müssen die Ketten noch verkürzt werden: Es gilt $v_1 - u_1 = 0$. Folglich kann die Kette (u_1, u_2) verkürzt werden. Es sei

$$\tilde{u}_1 := u_2 - v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $(\tilde{u}_1)$ eine Jordankette.

Da v_1 und $\tilde{u}_1$ linear unabhängig sind, sind auch $v_1, v_2, v_3, \tilde{u}_1$ linear unabhängig und daher

$$(v_1, v_2, v_3, \tilde{u}_1) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von B und

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.

Alternativ ist auch die folgende Rechnung möglich: Für den Eigenraum zum Eigenwert λ_1 gilt

$$E_1 := \ker(B - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Folglich gibt es zum Eigenwert λ_1 zwei Jordanblöcke.

Zum Bestimmen der noch fehlenden Basisvektoren des verallgemeinerten Eigenraums zum Eigenwert λ_1 ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$(B - \lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: v_1.$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist

$$L_1 := \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wählen einen Vektor $v_2 = (0,0,0,-\frac{1}{2}) \in L_1$ und lösen das Gleichungssystem

$$(B-\lambda_1 I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = v_2. \tag{1}$$

Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ist

$$L_2 := \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit ist

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \right)$$

eine Jordanbasis von A und

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Jordannormalform.

Wichtige Anmerkung: Bei der Wahl von v_2 hatten wir das Glück, daß das Gleichungssystem 1 eine Lösung hatte und den fehlenden Basisvektor lieferte. Für ein systematisches Suchen des fehlenden Basisvektors, hätte man das Gleichungssystem

$$(B-\lambda_2 I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

mit den Unbekannten $v \in \mathbb{R}^3$ und $s,t \in \mathbb{R}$ lösen können.

Hausübungen

(H 13) Jordan-Normalform (10 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils eine Jordannormalform der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

Die Matrix A ist eine obere Dreiecksmatrix. Folglich stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen und sind -1, 1 und 42. Da sie paarweise verschieden sind ist A diagonalisierbar und

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$$

ist eine Jordannormalform von A.

Die Matrix B ist reell und symmetrisch und daher diagonalisierbar. Für das charakteristische Polynom von B gilt

$$\chi_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-1)$$
$$= (1-\lambda)^2(1+\lambda)$$

Folglich besitzt B die Eigenwerte 1 mit der algebraischen Vielfachheit zwei und -1 mit der algebraischen Vielfachheit eins. Daher ist

$$J_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Jordannormalform von B.

Für das charakteristische Polynom von C gilt

$$\chi_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda-1)^2.$$

Folglich besitzt C die Eigenwerte 1 mit der algebraischen Vielfachheit zwei und 2 mit der algebraischen Vielfachheit eins.

Um zu entscheiden, ob es zum Eigenwert eins ein oder zwei Jordanblöcke gibt sind, ist die Dimension des entsprechenden Eigenraums E zu berechnen. Es gilt

$$E = \ker(C-I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{III-II}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da der Eigenraum die Dimension eins besitzt ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 1 gleich eins und daher

$$J_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Jordannormalform von C.

(H 14) Berechneung von e^{At} (10 Punkte)

In dieser Aufgabe werden wir uns überlegen, wie man zu einer $n \times n$-Matrix A ihr Bild unter der Exponentialfunktion berechnet.

(a) Berechnen Sie e^{At} für eine Diagonalmatrix A.

(b) Berechnen Sie e^{At} für einen Jordanblock.

Hinweis: Zerlegen Sie A zu $A = \lambda E + N$, mit N nilpotent.

(c) Wie kann man e^{At} für eine diagonalisierbare Matrix berechnen?

LÖSUNG:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^i = \begin{pmatrix} \lambda_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^i \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + N, \text{ mit } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, N^n = 0.$$

Da λE und N kommutieren, folgt (falls $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ noch nicht in der Vorlesung behandelt wurde: Über Cauchyprodukt und Binomialsatz, welcher aber nur gilt, wenn A und B kommutieren)

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{(\lambda E+N)t} = e^{\lambda tE} \cdot e^{Nt} = e^{\lambda t} \cdot E \cdot e^{Nt} \\ &= e^{\lambda t} \cdot (E + Nt + \frac{N^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{N^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}) \\ &= e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Sind S und S^{-1} die Matrizen, die A auf Diagonalform D bringen, so gilt

$$\begin{aligned} e^A &= e^{SDS^{-1}} = \lim_N \sum_n^N \frac{1}{n!}(SDS^{-1})^n = \lim_N \sum_n^N \frac{1}{n!} SDS^{-1}SDS^{-1} \cdots SDS^{-1} \\ &= \lim_N \sum_n^N \frac{1}{n!} SD^nS^{-1} = \lim_N S(\sum_n^N \frac{1}{n!} D^n)S^{-1} = Se^DS^{-1}. \end{aligned}$$

Also gilt $e^{At} = Se^{Dt}S^{-1}$.
Bemerkung: Analog funktioniert es bei einer Jordanmatrix.

(H 15) Jordan-Normalform (10 Punkte)

Lösen Sie Aufgabe G25.