Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

Sommersemester 2008
April 30, 2008

Lineare Algebra II

4. Übung

Gruppenübungen

(G 17) Eigenwerte von Matrizen endlicher Ordnung

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus ($f \neq id_V$). Es gelte $f^m = id_V$, für ein $m > 1$. Zeigen Sie: Die Eigenwerte von f sind m-te Einheitswurzeln.

(G 18)

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$, $f : V \to V$ ein Endomorphismus und $W \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum. Sei $p(x)$ das charakteristische Polynom von f und $p_W(x)$ das charakteristische Polynom von $f_{|W}$.

(a) Zeigen Sie, daß p_W ein Teiler von p ist.

(b) Zeigen Sie, daß, wenn $W \neq V$, dann ist p_W ein nicht-trivialer Teiler von p.

(G 19)

Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $A : V \to V$ ein Endomorphismus gegeben (bzgl. Standardbasis) durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne das charakteristische Polynom von A und gebe die Eigenwert von A an.

(b) Sei W der Eigenraum von A bezügl. Eigenwert $\lambda_1 = 2$. Beschreiben Sie W in einfachen Worten. Gebe eine Matrix für A_W an und berechne das charakteristische Polynom von $A_{|W}$, $p_W(x)$.

(c) Sei W' der Eigenraum von A bezügl. der 2 andere Eigenwerte ($\lambda_2, \lambda_3 \neq 2$). Beschreiben Sie W' in einfacher Worter. Geben Sie eine Matrix für $A_{W'}$ und berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A_{|W}$, $p_W(x)$.

(G 20)

Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $A : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, daß es Endomorphismen $D : V \to V$ und $N : V \to V$ gibt, so daß $A = D + N$, D diagonalisierbar ist, N nilpotent ist und $DN = ND$. (Hinweis: Benutzen Sie die Jordan-Zerlegung)

Hausübungen

(H 10)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $f : V \to V$ ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) f ist selbstadjungiert genau dann, wenn alle Eigenwerte von f reell sind.

(b) f ist unitär genau dann, wenn alle Eigenwerte den Betrag 1 haben.

(H 11)

Es sei $D \in M_n(\mathbb{C})$, und d habe n verschiedene Eigenwerte. Zeigen Sie: Für jedes $C \in M_n(\mathbb{C})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $CD = DC$.
2. C und D sind simultan Diagonaliserbar.
3. Es gibt ein Polynom p, so dass $C = p(D)$.

(H 12) Jordansche Normalform

Seien $V = \mathbb{R}^4$ und $A : V \to V$ ein Endomorphismus gegeben (bzgl. Standardbasis) durch die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynome von A.

(b) Bestimmen Sie die verallgemeinerten Eigenräume von A, d.h. $V^r(\lambda) = \ker(A - E)^r, r \geq 1$.

(c) Bestimmen Sie eine zyklische Basis für V bezüglich A.

(d) Was ist die Matrix für A bezüglich dieser Basis?