Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

Sommersemester 2008
August 13, 2008

Lineare Algebra II

4. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 17) Eigenwerte von Matrizen endlicher Ordnung

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus ($f \neq id_V$). Es gelte $f^m = id_V$, für ein $m > 1$. Zeigen Sie: Die Eigenwerte von f sind m-te Einheitswurzeln.

LÖSUNG:

Dass man ein solches f diagonalisieren kann, ist bekannt, aus der Vorlesung oder aus Aufgabe (T 5). Sei A die darstellende Matrix von f und S eine Transformationsmatrix, welche A diagonalisiert. Es gilt dann

$$\begin{aligned} E &= S^{-1}ES = S^{-1}A^mS \\ &= S^{-1}ASS^{-1}A^{m-1}S \\ &= \big(S^{-1}AS\big)S^{-1}ASS^{-1}A^{m-2}S \\ &= \cdots \\ &= \underbrace{\big(S^{-1}AS\big)\cdots\big(S^{-1}AS\big)}_{m \text{ mal}} \\ &= \big(S^{-1}AS\big)^m. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile steht nun aber eine Diagonalmatrix mit den m-ten Potenzen der Eigenwerte von f als Einträge, d.h. für jeden Eigenwert λ von f gilt

$$1 = \lambda^m.$$

(G 18)

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$, $f : V \to V$ ein Endomorphismus und $W \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum. Sei $p(x)$ das charakteristische Polynom von f und $p_W(x)$ das charakteristische Polynom von $f_{|W}$.

(a) Zeigen Sie, daß p_W ein Teiler von p ist.

(b) Zeigen Sie, daß, wenn $W \neq V$, dann ist p_W ein nicht-trivialer Teiler von p.

LÖSUNG:

Wir wissen daß $p(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - \lambda_j)$ wobei die λ_j Eigenwerte von f sind. Sei $W \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum und $g = f_W$. $p_g(x) = p_W(x) = \prod_{j=1}^{n_W}(1 - \mu_j)$ wobei $n_W = dim(W)$ und $\mu_1, \ldots, \mu_j$ die Eigenwerte von g sind. Aber es ist klar, daß $\{\mu_j\}$ eine Teilmenge von $\{\lambda_j\}$ ist, und also teilt $p_W(x)$ $p(x)$. Wieder ist naturlich die Menge $\{\mu_j\}$ ein echte Teilmenge genau wenn $W \subsetneq V$ und in diesem Falle ist p_W ein nicht-trivialer Teiler von p.

(G 19)

Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $A : V \to V$ ein Endomorphismus gegeben (bzgl. Standardbasis) durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne das charakteristische Polynom von A und gebe die Eigenwert von A an.

(b) Sei W der Eigenraum von A bezügl. Eigenwert $\lambda_1 = 2$. Beschreiben Sie W in einfachen Worten. Gebe eine Matrix für A_W an und berechne das charakteristische Polynom von $A_{|W}$, $p_W(x)$.

(c) Sei W' der Eigenraum von A bezügl. der 2 andere Eigenwerte ($\lambda_2, \lambda_3 \neq 2$). Beschreiben Sie W' in einfacher Worter. Geben Sie eine Matrix für $A_{W'}$ und berechnen Sie das charakteristische Polynom von $A_{|W}$, $p_W(x)$.

LÖSUNG:

a) Wir haben

$$\begin{aligned} p(t) &= \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 8 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 2-t & 3-t \end{vmatrix} + (3-t) \begin{vmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & 2-t \end{vmatrix} \\ &= 8(t-2) + (3-t)(1-t)(2-t) \\ &= (2-t)\left[(3-t)(1-t) - 8\right] = (2-t)(t-5)(t+1) \end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -1$. Offensichtlich ist $W = V_2(A) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\}$. D.h. W ist die y-Achse, $A_W = 2$ und $p_W(t) = 2 - t$.

b) Offensichtlich ist $W' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$. D.h. W ist die xz-Ebene,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und $p_W(t) = (1-t)(3-t) - 8 = (t-5)(t+1)$.

(G 20)

Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $A : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, daß es Endomorphismen $D : V \to V$ und $N : V \to V$ gibt, so daß $A = D + N$, D diagonalisierbar ist, N nilpotent ist und $DN = ND$. (Hinweis: Benutzen Sie die Jordan-Zerlegung)

LÖSUNG:

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ die Eigenwerte von A mit zugehörigen Entartungen $m_1, \ldots, m_k$. Und betrachte alles in der Basis die A in die Jordansche Normalform überführt. Sei V_k der verallgemeinte Eigenraum zum Eigenwert λ_l und $\mathbb{1}_k$ die identität am V_k. Die Jordansche Normalform ist in der Form: $Diag(A_1, \ldots, A_l)$ wobei $A_k = A_{|V_k}$. Es ist jetzt klar, dass die Operatoren $N_k = (A_k - \lambda_k \mathbb{1}_k)$ nilpotent sind und so ist auch $N = Diag(N_1, \ldots, N_l)$. Mit $D = Diag(\lambda_1 E_1, \ldots, \lambda_l E_l)$, einer Diagonalmatrix, gilt $A = D + N$ und offensichtlich ist $ND = DN$ weil alle Blöche kommutieren.

Hausübungen

(H 10)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $f : V \to V$ ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) f ist selbstadjungiert genau dann, wenn alle Eigenwerte von f reell sind.

(b) f ist unitär genau dann, wenn alle Eigenwerte den Betrag 1 haben.

LÖSUNG:

(a)

- Ist f selbstadjungiert und v ein beliebiger Eigenvektor mit zugehörigem Eigenwert λ, so gilt
$$\lambda v = f(v) = f^*(v) = \bar{\lambda} v,$$
da der adjungierte Endomorphismus die selben Eigenvektoren und konjugierte Eigenwerte hat (vgl. etwa Aufgabe (T 7)). Also ist $\lambda = \bar{\lambda}$ und somit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Seien umgekehrt alle Eigenwerte reell. Da f normal ist, gibt es eine ONB von Eigenvektoren von f, diese sind gleichzeitig Eigenvektoren zu f^*. Bezüglich dieser Basis haben die darstellenden Matrizen von f und f^* beide Diagonalgestalt. Diese Matrizen sind aber gleich, da die Eigenwerte von f^* gerade die komplex konjugierten der Eigenwerte von f sind (und die sind reell).

(b)

- Die Implikation „f unitär“ $\Longrightarrow$ „alle Eigenwerte von f haben Betrag 1“ wurde schon in Aufgabe (H 4) gezeigt.
- Umgekehrt gelte $|\lambda| = 1$ für jeden Eigenwert λ von f. f und somit f^* sind normal, sie besitzen also eine gemeinsame ONB von Eigenvektoren, bezüglich der ihre darstellenden Matrizen beide Diagonalgestalt haben. Bezeichne mit D die zu f gehörige Diagonalmatrix und mit $D^* = \bar{D}$ die zu f^*.
Sei $i \in \{1, \ldots, \dim V\}$ beliebig. Die i-te Zeile von D hat die Form $(0, \ldots, 0, \lambda, 0, \ldots, 0)$, mit einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, entsprechend lautet die i-te Spalte von $\bar{D}$ dann $(0, \ldots, 0, \bar{\lambda}, 0, \ldots, 0)^t$. Bildet man das Produkt DD^*, so ist dies eine Diagonalmatrix mit $|\lambda\,\bar{\lambda}| = 1$ als i-tem Diagonaleintrag. Da i beliebig war, folgt $DD^* = E$, also ist f unitär.

(H 11)

Es sei $D \in M_n(\mathbb{C})$, und d habe n verschiedene Eigenwerte. Zeigen Sie: Für jedes $C \in M_n(\mathbb{C})$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $CD = DC$.
2. C und D sind simultan Diagonaliserbar.
3. Es gibt ein Polynom p, so dass $C = p(D)$.

LÖSUNG:

- 1) $\Longrightarrow$ 2): Set $v_1, \ldots, v_n$ ein Basis so dass $D = Diag(\lambda, \ldots, \lambda_n)$ (ein Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ auf der Diagonale). D.h. $Dv_j = \lambda_j$. Dann ist $DCv_j = CDv_j = C\lambda_j v_j = \lambda_j C v_j$, d.h. Cv_j ist auch ein Eigenvektor zu D mit Eigenwert λ_j, d.h. $Cv_j = \mu_j v_j$ so bezüglich dieser Basis gilt auch $C = Diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

- 2) $\implies$ 3): Aus den Voraussetzungen folgt das D und C gleichzeitig diagonalisierbar sind. D.h. wir können voraussetzen, dass $D = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $C = Diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Damit ist
$$p(D) = Diag(p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n))$$
und die Frage is dann ob es ein Polynome $p(x) = \Sigma_{i=0}^m a_i x^i$ gibt, so dass $p(\lambda_j) = \mu_j$ für $j = 1, \ldots, n$. D.h. wir müssen Koeffizienten a_i finden so dass
$$\Lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^m \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^m \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$
erfüllt ist. Sei $m = n$ so, dass Λ Quadratisch ist. Weil die λ_i verscheiden sind, sind die Spalten und Zeilen alle unabhängig. Somit ist der Rang von $\Lambda = n$ und es gibt eine Lösung.
- 3) $\implies$ 1): Ist $C = p(D)$ mit einem Polynom der Form $p(x) = \sum_{i=0}^m c_i x^i$, vom Grad $m \geq 0$ und Koeffizienten $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{K}$, so gilt
$$p(D)\, D = \left(\sum_{i=0}^m c_i D^i \right) D = \sum_{i=0}^m c_i D^{i+1} = D \sum_{i=0}^m c_i D^i = D\, p(D).$$

(H 12) Jordansche Normalform

Seien $V = \mathbb{R}^4$ und $A : V \to V$ ein Endomorphismus gegeben (bzgl. Standardbasis) durch die Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynome von A.

(b) Bestimmen Sie die verallgemeinerten Eigenräume von A, d.h. $V^r(\lambda) = \ker(A - E)^r, r \geq 1$.

(c) Bestimmen Sie eine zyklische Basis für V bezüglich A.

(d) Was ist die Matrix für A bezüglich dieser Basis?

LÖSUNG:

Das charakteristisches Polynom ist:
$$\begin{aligned}
p_A(t) &= \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1-t & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-t \end{vmatrix} = \text{(addiere Zeil 4 zu 2 und 3)} = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & -t \\ -1 & 0 & -t & -t \\ 0 & 0 & -1 & 1-t \end{vmatrix} = \\
&= 1 \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & -t \\ -1 & 0 & -t \end{vmatrix} - (t-1) \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & -t \end{vmatrix} \\
&= 1\,(1-t) \begin{vmatrix} 1-t & -t \\ 0 & -t \end{vmatrix} - (t-1)\,(1-t) \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} \\
&= -(t-1)\left(t^2 - t\right) + (t-1)^2 \left(t^2 - t + 1\right) \\
&= (t-1)^2 \left[-t + t^2 - t + 1\right] = (t-1)^4 .
\end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned}
A-\mathbb{1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
(A-\mathbb{1})^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
(A-\mathbb{1})^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
(A-\mathbb{1})^4 &= 0.
\end{aligned}$$

Die verallgemeinerten Eigenräume sind $V^r(1) = ker\,(A-\mathbb{1})^r$, $r = 1,2,3,4$. Hier ist

$$(A-\mathbb{1})\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 - x_4 \\ -x_1 - x_4 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

also, $\vec{x} \in ker\,(A-\mathbb{1}) \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und x_2 beliebig. D.h.

$$V^1(1) = \left\{(0, x_2, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

$$(A-\mathbb{1})^2\,\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - x_4 \\ -x_1 + x_3 - x_4 \\ 0 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix},$$

$\vec{x} \in ker\,(A-\mathbb{1})^2 \Rightarrow x_1 + x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$. D.h.

$$V^2(1) = \left\{(x_1, x_2, 0, -x_1) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

$$(A-\mathbb{1})^3\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 - x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$V^3(1) = \left\{(x_1, x_2, x_3, -x_1) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Offensichtlich ist $\dim V^1(1) = 1$, $\dim V^2(1) = 2$ und $\dim V^3(1) = 3$ und wir möchten jetzt eine zyklische Basis für V finden. D.h. eine Basis v_1, v_2, v_3, v_4, sodass $(A-\mathbb{1})\,v_1 = v_2$, $(A-\mathbb{1})\,v_2 = v_3$, $(A-\mathbb{1})\,v_3 = v_4$ und $(A-\mathbb{1})\,v_4 = 0$.

Wir wollen dann v_4 aus $V^1(1)$ wählen, z.B. $v_4 = (0,1,0,0)$. Man kann danach verifizieren, dass $v_3 = (1,0,0,-1) \in V^2(1)$ $(A-\mathbb{1})\,v_3 = v_4$ erfüllt. Wieder können wir wählen $v_2 =$

$(0,0,1,0) \in V^3(1)$ weil $(A-\mathbb{1})\, v_2 = v_3$. Für den letzten (ersten) Vektor betrachten wir das Bild von $(A-\mathbb{1})$ und sehen gleich, dass $v_1 = (-1,0,0,0)$ $(A-\mathbb{1})\, v_1 = v_2$ erfüllt. Wir haben dann eine zyklisches Basis und bezüglich diesr Basis hat A die Matrix :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$