Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 25. April 2008

Lineare Algebra II

3. Übung

Gruppenübungen

(G 13) QR-Zerlegung

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und B eine $n \times m$ Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{K}$, weiterhin gelte $\operatorname{rang}(B) = m$. Dann hat B eine Zerlegung

$$B = QR,$$

wobei Q eine $n \times m$ Matrix ist, deren Spalten ein Orthonormalsystem bilden, und R eine $m \times m$ Dreiecksmatrix ist.
Berechnung der QR-Zerlegung: Man orthonormalisiert die Spalten $b_1, \ldots, b_m$ von B mit dem Gram-Schmidt Verfahren:

$$\begin{aligned}
u_1 &= b_1, & v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\
u_2 &= b_2 - \langle b_2, v_1 \rangle v_1, & v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} \\
&\ldots\ldots \\
u_m &= b_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle b_m, v_i \rangle v_i, & v_m &= \frac{u_m}{\|u_m\|}.
\end{aligned}$$

Die Spalten von Q sind nun die Vektoren $v_1, \ldots v_m$.

Die Einträge von r_{ij} von R sind geben durch

$$\begin{aligned}
r_{ij} &= \langle b_j, v_i \rangle, \quad \text{für } j > i, \\
r_{ii} &= \|u_i\|, \\
r_{ij} &= 0, \quad \text{für } j < i.
\end{aligned}$$

(a) Überprüfe die Identität $B = QR$.

(b) Berechne die QR-Zerlegung bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^4$ der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(G 14) Nilpotente Endomorphismen

Sei V ein Vektorraum der Dimension n über dem Grundkörper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

(a) Sei f ein nilpotenter Endomorphismus mit $f^i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $f^n = 0$. Sei weiter $V \ni v \neq 0$, mit $f^i(v) \neq 0$ für $0 \leq i \leq n-1$. Zeigen Sie: $v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)$ bilden eine Basis von V.

(G 15)

Sei V ein (reeller) euklidischer Vektorraum mit $dimV \geq 1$. Beweisen Sie: Zu jedem Endomorphismus f gibt einen Unterraum $W < V$ mit $1 \leq dimW \leq 2$ der unter f invariant ist.
(Hinweis: *Zerlegen Sie das charakteristische Polynom von f in irreduzible Faktoren. Wenn f keinen reellen Eigenvektor hat, benutzen Sie den Satz von Cayley-Hamilton, um ein w zu finden, für das* $\operatorname{lin}\{w, f(w)\}$ *unter f invariant ist.*)

(G 16) Matrizen mit geometrischer Bedeutung

(a) Wiederholen Sie die Definitionen unitärer und orthogonaler Matrizen.

(b) Zeigen Sie: Ist U eine unitäre Matrix, so ist gilt $|\det U| = 1$.

(c) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, mit a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, eine orthogonale 2×2 Matrix, also $A \in O(2)$. Welche Werte kann die Determinante von A annehmen?

(d) Schreiben Sie alle Gleichungen auf, die zwischen den Einträge von A genlten müssen, unterscheiden Sie dabei nach den in (c) auftretenen Fällen.

(e) Beschreiben Sie möglichst genau die geometrische Wirkung der folgenden orthogonalen Matrizen

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

(f) Geben Sie eine geometrische Charakterisierung der in (c) auftretenden Fälle!

Hausübungen

(H 7) Unitäre Gruppen, 10 Punkte

Wie in Aufgabe (H 4) bezeichnen wir mit $U(n)$ die Gruppe der unitären $n \times n$ Matrizen.

(a) Sei A eine komplexe $n \times n$ Matrix. Weisen Sie nach, dass $A \in U(n)$ gilt genau dann wenn die Spalten $s_1, \ldots, s_n$ von A eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ bilden.

(b) Weisen Sie nach, dass eine komplexe $n \times n$ Matrix genau dann unitär ist, wenn ihre Zeilen ein Orthonormalsystem bilden.

(H 8) Selbstadjungierte Endomorphismen, 10 Punkte

(a) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) mit einem nicht ausgearteten Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $f : V \to V$ ein sebstadjungierter Endomorphismus. Zeigen Sie: Ist f nilpotent, so gilt bereits $f = 0$.

(b) Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $A : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Aus Aufgabe (H 6) ist bekannt, dass es ein S gibt, so dass $S^{-1}AS$ diagonal ist. Zeigen Sie: S kann unitär gewählt werden.

(H 9) 10 Punkte

Berechne die QR-Zerlegung bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^4$ für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$