Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 18. Juni 2008

Lineare Algebra II

3. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 13) QR-Zerlegung

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und B eine $n \times m$ Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{K}$, weiterhin gelte $\operatorname{rang}(B) = m$. Dann hat B eine Zerlegung

$$B = QR,$$

wobei Q eine $n \times m$ Matrix ist, deren Spalten ein Orthonormalsystem bilden, und R eine $m \times m$ Dreiecksmatrix ist.
Berechnung der QR-Zerlegung: Man orthonormalisiert die Spalten $b_1, \ldots, b_m$ von B mit dem Gram-Schmidt Verfahren:

$$\begin{aligned}
u_1 &= b_1, & v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\
u_2 &= b_2 - \langle b_2, v_1 \rangle v_1, & v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} \\
&\ldots\ldots \\
u_m &= b_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle b_m, v_i \rangle v_i, & v_m &= \frac{u_m}{\|u_m\|}.
\end{aligned}$$

Die Spalten von Q sind nun die Vektoren $v_1, \ldots v_m$.
Die Einträge von r_{ij} von R sind geben durch

$$\begin{aligned}
r_{ij} &= \langle b_j, v_i \rangle, \quad \text{für } j > i, \\
r_{ii} &= \|u_i\|, \\
r_{ij} &= 0, \quad \text{für } j < i.
\end{aligned}$$

(a) Überprüfe die Identität $B = QR$.

(b) Berechne die QR-Zerlegung bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^4$ der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

(a) Aus dem Gram-Schmidt Verfahren erhält man mit den obigen Bezeichnungen:

$$b_k = \|u_k\| v_k + \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_k, v_j \rangle v_j.$$

Bezeichnet man die Einträge von Q mit q_{ij} und die von R mit r_{ij} so ist die k-te Spalte von QR ist ein Vektor der Form

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} q_{ij} r_{jk}\Big)_{i=1,\ldots,n}.$$

Da nun q_{ij} nach Voraussetzung gleich der $i$te Komponente von v_j ist, gilt

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} q_{ij} r_{jk}\Big)_{i=1,\dots,n} = \sum_{j=1}^{m} r_{jk} v_j = \sum_{j=1}^{k} r_{jk} v_j + 0 =$$
$$= \langle b_k, v_1\rangle\, v_1 + \langle b_k, v_2\rangle\, v_2 + \cdots + \langle b_k, v_{k-1}\rangle\, v_{k-1} + \|u_k\| v_k = b_k.$$

Somit stimmen die m Spalten von QR mit den m Spalten von B überein.

(b) Wir führen das Gram-Schmidt Verfahren aus:

$$u_1 = b_1, \qquad \|u_1\| = 2, \quad v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = b_2 - \langle b_2, v_1\rangle\, v_1 = b_2 - 2v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \|u_2\| = 4, \quad v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = b_3 - \langle b_3, v_1\rangle\, v_1 - \langle b_3, v_2\rangle\, v_2 b_3 - 2v_1 - 2v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \|u_3\| = 2, \quad v_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zusammen erhält man die Zerlegung

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = QR.$$

Bemerkung: Anders als in der Aufgabenstellung kann man auch $r_{ii} = \langle b_i, v_i\rangle$ setzen, denn

$$\langle b_i, v_i\rangle = \langle u_i, v_i\rangle + \sum_j \langle b_i, v_j\rangle \underbrace{\langle v_j, v_i\rangle}_{=0} = \langle u_i, u_i\rangle\, \|u_i\|^{-1} = \|u_i\| = r_{ii}.$$

(G 14) Nilpotente Endomorphismen

Sei V ein Vektorraum der Dimension n über dem Grundkörper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

(a) Sei f ein nilpotenter Endomorphismus mit $f^i \neq 0$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $f^n = 0$. Sei weiter $V \ni v \neq 0$, mit $f^i(v) \neq 0$ für $0 \leq i \leq n-1$. Zeigen Sie: $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ bilden eine Basis von V.

LÖSUNG:

(a) (indirekter Beweis) **Annahme:** Die Vektoren $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ sind linear abhängig, es gibt also Zahlen $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{K}$ nicht alle 0, sodass

$$0 = c_0 v + c_1 f(v) + \cdots + c_{n-1} f^{n-1}(v).$$

Wir führen dies nun induktiv auf den *Widerspruch* $c_0 = c_1 = \cdots c_{n-1} = 0$:

Wendet man nämlich f^{n-1} auf die rechte Seite dieser Gleichung an, so erhält man

$$0 = c_0 f^{n-1}(v) + 0,$$

also ist $c_0 = 0$, da $c_0 f^{n-1}(v)$.

Aus $c_0 = \cdots = c_{i-2} = 0$ folgert man durch anwenden von f^{n-i}, also $0 = \sum_{j=0}^{i-1} c_j f^{n-i+j)}(v) = 0 + c_{i-1} f^{n-1}(v) + 0$, dass auch $c_{i-1} = 0$.

Somit sind $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ also ein System von n linear unabhängigen Vektoren, mithin eine Basis von V.

(G 15)

Sei V ein (reeller) euklidischer Vektorraum mit $dimV \geq 1$. Beweisen Sie: Zu jedem Endomorphismus f gibt einen Unterraum $W < V$ mit $1 \leq dimW \leq 2$ der unter f invariant ist.
(Hinweis: *Zerlegen Sie das charakteristische Polynom von f in irreduzible Faktoren. Wenn f keinen reellen Eigenvektor hat, benutzen Sie den Satz von Cayley-Hamilton, um ein w zu finden, für das* $\mathrm{lin}\{w, f(w)\}$ *unter f invariant ist.*)

LÖSUNG:

Betrachte das charakteristische Polynom $P_f(t)$ von f, über $\mathbb{R}$ lässt sich dies folgendermaßen in irreduzible Faktoren zerlegen:

$$P_f(t) = c(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_r)Q_1(t)\cdots Q_m(t),$$

mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$, und irreduziblen quadratischen Polynomen $Q_i(t)$, $Q_i(t) = t^2 + b_i t + c_i$, mit reellen Zahlen b_i und c_i, für die $b^2 - 4c < 0$. Es ist $r > 0$ genau dann, wenn f reelle Eigenwerte hat. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Sei $r \geq 1$. Dann hat f mindestens einen Eigenwert λ_1. Ist v ein Eigenvektor zu diesem Eigenwert, so ist der eindimensionale Raum $W = \mathbb{R}v = \{\mu v;\ \mu \in \mathbb{R}\}$ natürlich invariant unter f, da $f(\mu v) = \lambda \mu v \in W$ für jedes $\mu \in \mathbb{R}$.
- Sei nun $r = 0$. Nach Cayley-Hamilton gilt

  $$P_f(f)(v) = Q_1(f) \circ \cdots \circ Q_m(f)(v) = 0, \quad \text{für jedes } v \in V,$$

  dabei bezeichnet $Q_1(f)$ die lineare Abbildung $v \mapsto (f \circ f)v + b_i f(v) + c_i v$.

  Für ein festes $v \in V$, mit $v \neq 0$, gibt es also ein j, $1 \leq j \leq m$, so dass $Q_j \circ \cdots \circ Q_m(f)(v) = 0$ und $w := Q_{j+1} \circ \cdots \circ Q_m(f)(v) \neq 0$. Für $Q_m(f)(v) = 0$ setzt man $w = v$. Es gilt also $w \neq 0$ und $Q_j(w) = 0$.

  Setzt man nun $W = \mathrm{lin}\{w, f(w)\}$, so folgt aus

  $$Q_j(w) = f(f(w)) + b_j f(w) + c_j w = 0, \quad \text{dass} \quad f(f(w)) \in W.$$

  Damit folgt $f(u) \in W$ für jedes $u \in W$, also ist W ein f-invarianter Teilraum. Die Dimension von W ist 2, da w nach Voraussetzung kein Eigenvektor sein kann.

(G 16) Matrizen mit geometrischer Bedeutung

(a) Wiederholen Sie die Definitionen unitärer und orthogonaler Matrizen.

(b) Zeigen Sie: Ist U eine unitäre Matrix, so ist gilt $|\det U| = 1$.

(c) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, mit a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, eine orthogonale 2×2 Matrix, also $A \in O(2)$. Welche Werte kann die Determinante von A annehmen?

(d) Schreiben Sie alle Gleichungen auf, die zwischen den Einträge von A genlten müssen, unterscheiden Sie dabei nach den in (c) auftretenen Fällen.

(e) Beschreiben Sie möglichst genau die geometrische Wirkung der folgenden orthogonalen Matrizen

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

(f) Geben Sie eine geometrische Charakterisierung der in (c) auftretenden Fälle!

LÖSUNG:

(a) Eine komplexe Matrix U heißt unitär wenn $U^*U = E$. Eine Matrix O heißt orthogonal wenn O nur reelle Einträge hat und $O^tO = E$.

(b) Die Determinante einer diagonalisierbaren Matrix ist gleich der Determinante ihrer Diagonalmatrix. Also ist $\det U$ gleich dem Produkt der Eigenwerte von U. Nun gilt für jeden Eigenwert λ von U, vgl. (H 4), dass $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ also gilt $|\det U| = 1$.

(c) A ist orthogonal, insbesondere also unitär. (Per Definition ist $A^{-1} = A^t$. Da A nur reelle Einträge hat, ist dies gleich A^*.) Nach Teilaufgabe (b) $|\det A| = 1$. Andererseits ist $\det A \in \mathbb{R}$, also gibt es nur die zwei Möglichkeiten $\det A = +1$ und $\det A = -1$.

(d) Allgemein gilt $\det A = ad - bc$ und

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \text{sowie} \quad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Da$A \in O(2)$, muss gelten $A^t = A^{-1}$.

Fall 1: $\det A = 1$. Wir haben also

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$\text{also} \quad a = d, b = -c, \quad \text{und} \quad ad - bc = a^2 + c^2 = 1.$$

Fall2: $\det A = -1$. Es gilt

$$-\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$\text{also} \quad a = -d, b = c, \quad \text{und} \quad ad - bc = -a^2 + b^2 = -1.$$

(e) Die Matrix A beschreibt eine Drehung um $\frac{\pi}{6}$ im positiven Drehsinn (gegen den Uhrzeiger). Die Orientierung bleibt erhalten. Um dies zu sehen, berechnet man z.B.

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Den Drehwinkel erhält man z.B. aus arrccos $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Die Matrix B beschreibt eine Spiegelung an der Diagonalen, da sie die beiden Koordinatenachsen vertauscht, d.h. die Orientierung wird nicht erhalten.

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix C beschreibt ebenfalls eine Spiegelung. Genauer entspricht C einer Spiegelung an der Geraden, die mit der x-Achse einen Winkel von $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$ einschließt. Um dies zu sehen, kann man ähnlich vorgehen wie oben und die Bilder der Einheitsvektoren berechnen, diese sind $\frac{1}{2}\left(1, \sqrt{3}\right)^t$ und $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}, -1\right)^t$, oder man erkennt $C = BA$.

(f) Orthogonale 2×2 Matrizen beschreiben Drehungen und Spiegelungen der Ebene. Gilt für $A \in O(2)$, dass $\det A = +1$, so ist die entsprechende Transformation orientierungserhaltend und beschreibt eine reine Drehung. Gilt hingegen $\det A = -1$ so beschreibt A eine Spiegelung an einer Gerade durch den Ursprung.

Hausübungen

(H 7) Unitäre Gruppen, 10 Punkte

Wie in Aufgabe (H 4) bezeichnen wir mit $U(n)$ die Gruppe der unitären $n \times n$ Matrizen.

(a) Sei A eine komplexe $n \times n$ Matrix. Weisen Sie nach, dass $A \in U(n)$ gilt genau dann wenn die Spalten $s_1, \ldots, s_n$ von A eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ bilden.

(b) Weisen Sie nach, dass eine komplexe $n \times n$ Matrix genau dann unitär ist, wenn ihre Zeilen ein Orthonormalsystem bilden.

LÖSUNG:

(a) Nach Definition ist $A \in M_n(\mathbb{C})$ genau dann unitär, wenn $A^*A = E$.

- Sei zunächst $A \in U(n)$. Sind $s_1, \ldots, s_n$ die Spalten von A, so sind die Zeilen A^* gegeben durch $\bar{s}_1^t, \ldots, \bar{s}_n^t$. Da $A^*A = E$, ist also $\bar{s}_i^t s_j$ genau der Eintrag von E an der Stelle i,j, also 1 genau für $i = j$ und 0 sonst. Mit anderen Worten $\langle s_i, s_j \rangle = \delta_{ij}$ mit dem Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Also sind die Spalten ein Orthonormalsystem. Da A invertierbar ist (Inverses A^*!), sind insbesondere die Spalten von A eine Basis des $\mathbb{C}^n$.
- Hat man umgekehrt eie Matrix A mit Spalten $s_1, \ldots, s_n$, die eine ONB von $\mathbb{C}^n$ sind, so folgt aus

$$\langle s_i, s_j \rangle = s_i^* s_j = \delta_{ij},$$

dass $A^*A = E$, da A^* die Zeilen $s_1^*, \ldots, s_n^*$ hat. Also ist $A \in U(n)$.

(b) Es gilt $A \in U(n)$ genau dann, wenn $A^*A = E$. Dies ist äuivalent zu $AA^* = E$. (Da $A^* = A^{-1}$ äquivalent zu $(A^*)^{-1} = A$ ist.)

- Sei A eine unitäre Matrix mit Zeilen $z_1, \ldots, z_n$, dann sind die Spalten von A^* durch $\bar{z}_1^t, \ldots, \bar{z}_n^t$ gegeben. Da A^* auch unitär ist, folgt aus der vorherigen Teilaufgabe sofort $\bar{z}_1^t, \ldots, \bar{z}_n^t$ sind eine ONB von V. Damit sind die Zeilenvektoren $z_1, \ldots, z_n$ ein Orthonormalsystem.
- Sind umgekehrt die Zeilen von A ein Orthonormalsystem, so sind die Spalten von A^* eine ONB von $\mathbb{C}^n$ also ist A^* unitär und somit auch $(A^*)^{-1} = A$.

Bemerkung: Bei gilt es zu beachten, dass man es mit *Zeilenvektoren* zu tun hat. So ist etwa $z_i \bar{z}_j{}^t$ eine komplexe Zahl (und keine Matrix). Es gilt

$$z_i \bar{z}_j{}^t = \left\langle z_i^*, z_j^* \right\rangle,$$

mit dem wie üblich für Spaltenvektoren definierten Standardskalarprodukt.

(H 8) Selbstadjungierte Endomorphismen, 10 Punkte

(a) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) mit einem nicht ausgearteten Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $f : V \to V$ ein sebstadjungierter Endomorphismus. Zeigen Sie: Ist f nilpotent, so gilt bereits $f = 0$.

(b) Sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $A : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Aus Aufgabe (H 6) ist bekannt, dass es ein S gibt, so dass $S^{-1}AS$ diagonal ist. Zeigen Sie: S kann unitär gewählt werden.

Lösung:

(a) Nach Voraussetzung gibt es eine kleinste natürliche Zahl $m > 0$, so dass $f^m = 0$. Für jedem Eigenvektor v von f gilt

$$0 = f^m v = \lambda^m v, \quad \text{folglich ist } \lambda = 0.$$

Also hat f keine anderen Eigenwerte als die 0. Nach Voraussetzung ist f aber selbstadjungiert und somit diagonalisierbar. Also ist f die Nullabbildung. (Die darstellende Matrix ist ähnlich zur 0-Matrix.)

(b) Eine Matrix S, die A diagonlisiert, erhält man indem man eine Basis aus Eigenvektoren zu A bestimmt. Diese ergeben die Spaltenvektoren von S.
Da die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten von A aufeinander senkrecht stehen, erhält man eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu A, indem eine ONB für jeden Eigenraum bestimmt (etwa mit Gram-Schmidt). Verwendet man diese Basis für die Spaltenvektoren von S, so ist S unitär, vgl. (H 7).

(H 9) 10 Punkte

Berechne die QR-Zerlegung bezüglich des Standardskalarprodukts von $\mathbb{R}^4$ für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Es ist $u_1 = b_1$, $v_1 = \frac{1}{4} b_1 = \frac{1}{2}\left(1, -1, 1, -1\right)^t$. Weiter erhält man

$$u_2 = b_2 - \frac{1}{4}\langle b_2, b_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $v_2 = \frac{1}{2}\left(1, 1, 1, 1\right)^t$. Weiter ist

$$u_3 = b_3 - \frac{1}{2} v_1 - \frac{3}{2} v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Also ist $v_3 = \frac{1}{4}u_3 = \frac{1}{2}\big(1,-1,-1,1\big)^t$. Schließlich erhält man ebenso

$$u_4 = b_4 - 1v_1 - 2v_2 - 3v_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Schließlich ist $v_4 = \frac{1}{2}\big(1,1,-1,-1\big)$. Also hat man schließlich die Zerlegung

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$