Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Erik Hofmann
Frederik Strmberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 9.10.2007

Lineare Algebra II

2. Übung

Gruppenübungen

(G 7) Orthonormalisierung

Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{b}_1 = (1\ 1\ 1\ 1)^T$, $\mathbf{b}_2 = (1\ 0\ 1\ 0)^T$ und $\mathbf{b}_3 = (2\ 1\ 1\ 2)^T$.

(a) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis der linearen Hülle $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Zeigen Sie, daß der Vektor $\mathbf{v} = (\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{-5}{2}\ \frac{9}{2})^T$ in der lineare Hülle $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt und stelle ihn als Linearkombination der in Teil a) konstruierten Basis dar.

(G 8) Komplementärräume

Es seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum sowie $U, W \leq V$ Untervektorräume von V. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ (b) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$ (c) $V = U \oplus U^\perp$
(d) $\mathrm{dim} U^\perp = \mathrm{dim} V - \mathrm{dim} U$

(G 9) Hyperebenen

Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ein Vektor in V.

(a) Zeigen Sie, daß die Menge $\mathbf{v}^\perp$ eine Hyperebene (d.h. ein Untervektorraum der Kodimension 1) ist.

(b) Beschreiben Sie die Spiegelung $\sigma_{\mathbf{v}}$ an der Hyperebene $\mathbf{v}^\perp$ durch $\mathbf{v}$ und das Skalarprodukt. Geben sie die Abbildungsvorschrift an.

(G 10)

Führe das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren mit den Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aus.

Welches Problem tritt dabei auf und was ist dessen Ursache?

(G 11)

Komplexe quadratische komplexe Matrizen A, welche die Gleichung $A^*A = E$ erfüllen, heißen *unitär*.

(a) Ist U unitär, so ist auch U^* unitär.

(b) Eine $n \times n$-Matrix U ist genau dann unitär, wenn die Spalten von U eine ON-Basis von $\mathbb{C}^n$ bilden.

(G 12)

Wir betrachten den reellen Vektorraum Raum V aller Polynome vom Grad höchstens 2 auf dem Einheitsintervall. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$

Hausübungen

(H 4) Die unitäre Gruppe, 10 Punkte

Komplexe quadratische Matrizen A, welche die Gleichung $A^*A = E$ erfüllen, heißen *unitär*. Die Menge aller unitären $n \times n$-matrizen wird mit $U(n)$ bezeichnet.

(a) Beweisen Sie, daß $U(n)$ eine Gruppe ist.

(b) Beweisen Sie, daß jede unitäre $n \times n$-Matrix eine Isometrie $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ beschreibt (d.h. daß die lineare Abbildung Abstände von Vektoren erhält).

(c) Beweisen Sie, daß Eigenwerte unitäre Abbildungen Betrag 1 haben.

(H 5) 10 Punkte

Konstruieren Sie eine Orthogonalbasis des $\mathbb{C}^3$, in der der Vektor $(1-i, 1+i, 2i)^T$ vorkommt.

(H 6) 10 Punkte

Es sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $A : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus.

(a) Beweisen Sie, daß A nur reelle Eigenwerte haben kann.

(b) Zeigen Sie, daß es einen Eigenvektor $0 \neq v$ von A gibt und daß $v^\perp$ ein A-invarianter Untervektorraum ist.

(c) Zeigen Sie, daß A diagonalisierbar ist.