Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Erik Hofmann
Frederik Strmberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008 9.10.2007

Lineare Algebra II

12. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 7) Orthonormalisierung

Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{b}_1 = (1\ 1\ 1\ 1)^T$, $\mathbf{b}_2 = (1\ 0\ 1\ 0)^T$ und $\mathbf{b}_3 = (2\ 1\ 1\ 2)^T$.

(a) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis der linearen Hülle $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Zeigen Sie, daß der Vektor $\mathbf{v} = (\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{-5}{2}\ \frac{9}{2})^T$ in der lineare Hülle $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt und stelle ihn als Linearkombination der in Teil a) konstruierten Basis dar.

Lösung:

(a) Mit dem Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt ergeben sich die folgenden Schritte:

$$u_1 = b_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$$
$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T$$
$$u_2 = b_2 - \langle v_1, b_2\rangle v_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T$$
$$v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T$$
$$\begin{aligned}u_3 &= b_3 - \langle v_1, b_3\rangle v_1 - \langle v_2, b_3\rangle v_2 \\ &= \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^T - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T - \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T\end{aligned}$$
$$v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T$$

Folglich ist (v_1, v_2, v_3) eine Orthonormalbasis von $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Um nachzuweisen, daß v in $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt, berechnen wir den Anteil von v der nicht in $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt:

$$v - \langle v_1, v\rangle v_1 - \langle v_2, v\rangle v_2 - \langle v_3, v\rangle v_3 = v - 2v_1 + 3v_2 - 4v_3 = 0 \tag{1}$$

Da der Anteil von v außerhalb von $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$ verschwindet, liegt v in $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$ und aus Gleichung 1 ergibt sich sofort die gesuchte Linearkombination:

$$v = 2v_1 - 3v_2 + 4v_3.$$

(G 8) Komplementärräume

Es seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum sowie $U, W \leq V$ Untervektorräume von V. Beweisen Sie die folgenden Gleichungen:

(a) $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ (b) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$ (c) $V = U \oplus U^\perp$
(d) $\mathrm{dim} U^\perp = \mathrm{dim} V - \mathrm{dim} U$

LÖSUNG:

(a) Es seien $u + w \in U + W$ und $x \in U^\perp \cap W^\perp$ beliebige Elemente. Es gilt

$$\langle u + w \mid x \rangle = \underbrace{\langle u \mid x \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle w \mid x \rangle}_{=0} = 0,$$

was die Inklusion $U^\perp \cap W^\perp \subset (U+W)^\perp$ beweist. Sind umgekehrt $x \in (U+W)^\perp$ und $u \in U$, $w \in W$ beliebige Elemente, dann folgt $\langle x \mid u \rangle = 0$ and $\langle x \mid w \rangle = 0$, und somit $x \in U^\perp$ und $x \in W^\perp$. Dies impliziert $x \in U^\perp \cap W^\perp$.

(b) Anwenden von a) auf $U^\perp$ und $W^\perp$ ergibt

$$(U^\perp + W^\perp)^\perp = U^{\perp\perp} \cap W^{\perp\perp}.$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten das orthogonale Komplement und beachtet $U^{\perp\perp} = U$, so erhält man die gewünschte Gleichung.

(c) Es sei $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine ON-Basis von U. Wir ergänzen diese zu einer Basis

$$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$$

von V. Nach Durchführung des Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahrens erhält man eine ON-Basis

$$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w'}_1, \ldots, \mathbf{w'}_m)$$

von V, wobei die Vektoren $\mathbf{w'}_1, \ldots, \mathbf{w'}_m$ auf den Basisvektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ von U senkrecht stehen, also in $U^\perp$ liegen. Die Summe $U \oplus U^\perp$ ist direkt, da sich die Untervekrorräume U und $U^\perp$ trivial schneiden. Weil die Dimension der direkten Summe $U \oplus U^\perp \leq V$ gleich der Dimension von V ist, folgt $U \oplus U^\perp = V$.

(d) Dies folgt aus c).

(G 9) Hyperebenen

Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ein Vektor in V.

(a) Zeigen Sie, daß die Menge $\mathbf{v}^\perp$ eine Hyperebene (d.h. ein Untervektorraum der Kodimension 1) ist.

(b) Beschreiben Sie die Spiegelung $\sigma_\mathbf{v}$ an der Hyperebene $\mathbf{v}^\perp$ durch $\mathbf{v}$ und das Skalarprodukt. Geben sie die Abbildungsvorschrift an.

LÖSUNG:

(a) Das orthogonale Komplement $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ist bekanntlich ein Untervektorraum (siehe z.B. G2, 14. Übung). Somit reicht es zu zeigen, daß dieser Untervektorraum Kodimension 1 hat. Nach Aufgabe G8 c) gibt es eine ON-Basis $(\mathbf{w'}_1, \ldots, \mathbf{w'}_m)$ von $\mathbf{v}^\perp$, so daß $(\mathbf{v}, \mathbf{w'}_1, \ldots, \mathbf{w'}_m)$ eine Basis von V ist. Somit hat $\mathbf{v}^\perp$ Kodimension 1 in V.

(b) $\sigma_{\mathbf{v}} : V \to V$, $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w} - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{w}$

(G 10)

Führe das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren mit den Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aus.

Welches Problem tritt dabei auf und was ist dessen Ursache?

LÖSUNG:

Mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren ergeben sich die folgenden Schritte:

$$\begin{aligned}
u_1 &= b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T \\
v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T \\
u_2 &= b_2 - \langle b_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T - \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T \\
v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{4}{9}}} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T \\
u_3 &= b_3 - \langle b_3, v_1\rangle v_1 - \langle b_3, v_2\rangle v_2 \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}^T - \left(-\tfrac{1}{3} + \tfrac{20}{3} + \tfrac{8}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T - \left(-\tfrac{2}{3} - \tfrac{20}{3} + \tfrac{4}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T \\
&= 0
\end{aligned}$$

Im dritten Schritt erhält man den Nullvektor, womit der Algorithmus nicht fortgesetzt werden kann, da die nachfolgende Normierung nicht möglich ist. Die Ursache des Problems ist, daß (b_1, b_2, b_3) nicht linear unabhängig sind ($b_3 = 2b_1 - 3b_2$), was aber Voraussetzung für das Orthonormalisierungsverfahren ist.

(G 11)

Komplexe quadratische komplexe Matrizen A, welche die Gleichung $A^*A = E$ erfüllen, heißen *unitär*.

(a) Ist U unitär, so ist auch U^* unitär.

(b) Eine $n \times n$-Matrix U ist genau dann unitär, wenn die Spalten von U eine ON-Basis von $\mathbb{C}^n$ bilden.

LÖSUNG:

(a) Ist U unitär, so ist die Matrix U^* die zu U inverse Matrix, d.h. es gilt $U^*U = E = UU^*$. Daraus folgt $(U^*)^*U^* = UU^* = E$.

(b) Der Eintrag in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von U^*U' ist nach Definition durch

$$\begin{aligned}
(u_{i,1}^*, \dots, u_{i,n}^*)(u_{1,j}, \dots, u_{n,j})^T &= (\overline{u}_{i,1}, \dots, \overline{u}_{i,n})(u_{1,j}, \dots, u_{n,j})^T \\
&= \langle (u_{i,1}, \dots, u_{i,n})^T, (u_{1,j}, \dots, u_{n,j})^T \rangle
\end{aligned}$$

gegeben. Ist U unitär, so gilt $U^*U = E$, d.h. für $I \neq j$ verschwindet dieser Eintrag und die i-te Spalte von U steht senkrecht auf der j-ten Spalte von U. Bilden umgekehrt die Spalten von U eine ON-Basis, so folgt aus obiger Gleichung $U^*U = E$, d.h. U ist unitär.

(G 12)

Wir betrachten den reellen Vektorraum Raum V aller Polynome vom Grad höchstens 2 auf dem Einheitsintervall. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$

LÖSUNG:

Wir führen das Gram-Schmidt Verfahren mit der Basis $1, x, x^2$ durch:

1. Da wegen $< 1, 1 >= 1$ das konstante Polynom 1 schon die Norm 1 hat, kann man dieses als ersten Basisvektor v_1 wählen.
2. Aus $< 1, x >= \frac{1}{2}$ folgt $v_2 = \frac{x-\frac{1}{2}}{\|x-\frac{1}{2}\|} = \sqrt{12}(x - \frac{1}{2})$.
3. Aus $< 1, x^2 >= \frac{1}{3}$ und $< \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}), x^2 >= \frac{\sqrt{12}}{12} = \frac{1}{\sqrt{12}}$ folgt $v_3 = \frac{x^2-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\|x^2-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\|} = \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3})$.

Hausübungen

(H 4) Die unitäre Gruppe, 10 Punkte

Komplexe quadratische Matrizen A, welche die Gleichung $A^*A = E$ erfüllen, heißen *unitär*. Die Menge aller unitären $n \times n$-matrizen wird mit $U(n)$ bezeichnet.

(a) Beweisen Sie, daß $U(n)$ eine Gruppe ist.

(b) Beweisen Sie, daß jede unitäre $n \times n$-Matrix eine Isometrie $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ beschreibt (d.h. daß die lineare Abbildung Abstände von Vektoren erhält).

(c) Beweisen Sie, daß Eigenwerte unitäre Abbildungen Betrag 1 haben.

LÖSUNG:

(a) Die Einheitsmatrix ist unitär: $E \in U(n)$, somit hat $U(n)$ ein neutrales Element. Weiterhin gilt für unitäre $n\times n$ Matrizen A und B die Gleichung $(AB)^*(AB) = B^*(A^*A)B = B^*EB = E$. Somit ist das Produkt zweier unitärer Matrizen $A, B \in U(n)$ wieder unitär. Das Inverse einer unitären Matrix U ist die Matrix U^*. Für diese gilt $(U^*)^*U^* = UU^* = E$, somit hat jede unitäre Matrix $U \in U(n)$ ein inverses in $U(n)$. Damit ist $U(n)$ eine Gruppe.

(b) Ist U eine unitäre $n \times n$-Matrix, so gilt

$$\langle U\mathbf{v}, U\mathbf{w}\rangle = \langle U^*U\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$. Somit erhält die durch U beschriebene lineare Abbildung das Skalarprodukt und damit die Abstände, d.h. sie ist eine Isometrie.

(c) Ist $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ einer unitären Abbildung U, so gilt

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \langle U\mathbf{v}, U\mathbf{v}\rangle = \langle \lambda\mathbf{v}, \lambda\mathbf{v}\rangle = \overline{\lambda}\lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = |\lambda|^2\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle.$$

aus $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ folgt somit $|\lambda|^2 = 1$.

(H 5) 10 Punkte

Konstruieren Sie eine Orthogonalbasis des $\mathbb{C}^3$, in der der Vektor $(1-i, 1+i, 2i)^T$ vorkommt.

Lösung:

Man muß sich zunächst klarmachen, daß man zwar nichtnormierte Vektoren sucht, im Gram-Schmidt-Verfahren die Normierungskonstanten aber benötigt. Sei $b_1 = (1-i, 1+i, 2i)^T$ durch e_2, e_3 zu einer Basis von $\mathbb{C}^3$ ergänzt. Es ist $v_1 = \frac{1}{\sqrt{8}} b_1$. Daher erhält man

$$u_2 = e_2 - \frac{1}{8}\langle b_1, e_2\rangle b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}(1-i)\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2i \\ 6 \\ -2-2i \end{pmatrix}.$$

Sei $h_2 = (2i, 6, -2-2i)^T$. Dann ist $|h_2|^2 = 48$ und man erhält im nächsten Schritt

$$u_3 = e_3 - \frac{1}{8}\langle b_1, e_3\rangle b_1 - \frac{1}{48}\langle h_2, e_3\rangle h_2 = \frac{1}{48}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 48 \end{pmatrix} + 12i\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix} - (2i-2)\begin{pmatrix} 2i \\ 6 \\ -2-2i \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{48}\begin{pmatrix} 16+16i \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als einfachste Orthogonalbasis entnimmt man aus dieser Rechnung

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 3 \\ -1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(H 6) 10 Punkte

Es sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $A : V \to V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus.

(a) Beweisen Sie, daß A nur reelle Eigenwerte haben kann.

(b) Zeigen Sie, daß es einen Eigenvektor $0 \neq v$ von A gibt und daß $v^\perp$ ein A-invarianter Untervektorraum ist.

(c) Zeigen Sie, daß A diagonalisierbar ist.

Lösung:

(a) Ist $v \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, so gilt

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle A^* v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle,$$

und somit $(\lambda - \overline{\lambda})\langle v, v\rangle = 0$. Aus $\langle v, v\rangle \neq 0$ folgt somit $\lambda = \overline{\lambda}$.

(b) Für alle $w \in v^\perp$ gilt

$$\langle v, Aw\rangle = \langle A^* v, w\rangle = \langle Av, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle = 0.$$

Somit steht Aw senkrecht auf v, d.h. $Aw \in v^\perp$.

(c) Dies wurde (für reell lineare Abbildungen) in der Vorlesung durchgeführt. Der Beweis überträgt sich.