Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 30. Juni 2008

Lineare Algebra II

13. Übung

Gruppenübungen

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ einen Körper mit Charakteristik $\neq 2$. V ist stets eine $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension.

(G 50) Satz 9 für Hyperbolische Ebenen

Sei (V, q) eine hyperbolische Ebene über $\mathbb{K}$. Weisen Sie nach, dass jede Isometrie $s \in O(V, q)$ sich als Produkt von höchstens 2 Spiegelungen darstellen lässt.
(Hinweis: Reduzieren Sie auf die beiden Fälle, die im Beweis von Satz 9 behandelt wurden.)

(G 51)

Es gilt folgender Satz: Eine Isometrie s ist genau dann als Produkt von weniger als $n = \dim V$ Spiegelungen darstellbar, wenn s einen Fixvektor $0 \neq v \in V$ besitzt.
Eine Richtung ($\Leftarrow$) dieser Äquivalenz wurde bereits in der Vorlesung (für v anisotrop) behandelt, nun soll auch die umgekehrte Richtung gezeigt werden.

(a) Seien $H_1, \ldots, H_r$, $1 \leq r \leq n$, Hyperebenen in V. Beweisen Sie:

$$\dim (H_1 \cap \cdots \cap H_r) \geq n - r.$$

(b) Weisen nun nach: Ist $s = s_1 \cdots s_r$, mit $r < n$, und Spiegelungen s_i an Hyperebenen $H_i \subset V$, so gibt es einen Vektor $0 \neq v \in V$ mit $sv = v$.

(c) Vervollständigen Sie die Beweisrichtung ($\Leftarrow$) aus der Vorlesung, indem Sie zeigen: Gibt es zu s einen isotropen Vektor $0 \neq v \in V$ mit $sv = v$, so existiert auch ein anisotroper Fixvektor für s. *(Hinweis: Betrachten Sie eine hyperbolische Ebene, die v enthält.)*

(G 52)

Sei (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum über $\mathbb{K}$, mit $\dim V = n$.

(a) Zeigen Sie: Ist n ungerade, so besitzt jedes $s \in SO(V, q)$ einen Fixvektor ungleich 0.

(b) Wie lautet die analoge Aussage für gerades n?

(G 53)

Sei (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum über $\mathbb{K}$. Geben sie (mit Nachweis) eine Isometrie $s : V \to V$ an, die sich nicht als Produkt von weniger als $n = \dim V$ Spiegelungen darstellen lässt.

(G 54) Drehungen in der Ebene

Sei nun (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum der Dimension 2. Zeigen Sie: Für eine Isometrie $s : V \to V$, $s \neq id_V$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. $s \in SO(V, q)$.
2. s ist Produkt von genau zwei Spiegelungen,
3. 0 ist der einzige Fixvektor von s.

(G 55)

Sei (V, q) eine nicht ausgearteter quadratischer Raum über $\mathbb{K}$. Beweisen Sie folgenden Satz: Ist s eine Isometrie, für welche die Menge $\{x \in V;\, sx = x\}$ eine Hyperebene $H \subset V$ ist, dann ist H nicht ausgeartet (und somit $s = s_H$).
Anleitung: Nehmen Sie an, H ist ausgeartet.

(a) Zeigen Sie: $H \cap H^\perp = H^\perp$.

(b) Betrachten Sie die orthogonale Zerlegung $H = H^\perp \perp W$, mit W nicht ausgeartet. Zeigen Sie dann: $W^\perp$ ist eine hyperbolische Ebene.

(c) Leiten Sie nun den Widerspruch $s = id_V$ her.

Hausübungen

(H 1)

Wiederholen Sie den Stoff der Linearen Algebra und bearbeiten Sie alle Aufgaben, die Sie bisher ausgelassen haben.