Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 30. Juni 2008

Lineare Algebra II

13. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ einen Körper mit Charakteristik $\neq 2$. V ist stets eine $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension.

(G 50) Satz 9 für Hyperbolische Ebenen

Sei (V, q) eine hyperbolische Ebene über $\mathbb{K}$. Weisen Sie nach, dass jede Isometrie $s \in O(V, q)$ sich als Produkt von höchstens 2 Spiegelungen darstellen lässt.
(Hinweis: Reduzieren Sie auf die beiden Fälle, die im Beweis von Satz 9 behandelt wurden.)

LÖSUNG:

Da (V, q) eine hyperbolische Ebene ist, gibt es eine Basis u, v mit

$$q(u) = q(v) = 0 \quad \text{und} \quad b_q(u, v) = 1.$$

Die isotropen Vektoren in V sind genau die Vielfachen von u und von v. Da $q(su) = q(sv) = 0$ gelten muss, hat man entweder $su = \alpha u$ und $sv = \beta v$ oder $su = \alpha v$ und $sv = \beta u$, mit $\alpha, \beta \in K^*$. Da außerdem $b_q(su, sv) = 1$, folgt $\beta = \alpha^{-1}$. Also

$$su = \alpha v,\ sv = \alpha^{-1} u \quad \text{oder} \tag{1}$$
$$su = \alpha u,\ sv = \alpha^{-1} v. \tag{2}$$

Gilt nun (1), so ist der Vektor $\alpha v + u$ ein Fixvektor von s, denn $s(\alpha v + u) = \alpha\alpha^{-1}v + \alpha v = \alpha v + u$. Außerdem ist $\alpha v + u$ anisotrop. Also besitzt s einen anisotropen Fixvektor in V. Dies ist aber der erste Fall, der bereits in der Vorlesung im Beweis von Satz 9 gezeigt wurde.

Wir nehmen nun an, es gilt (2). Ist $\alpha = 1$, folgt $s = id$. Da jede Spiegelung t die Gleichung $t^2 = id$ erfüllt, ist dann nichts zu zeigen. Ohne Einschränkung also $\alpha \neq 1$. Dann ist $u + v$ anisotrop und $s(u + v) + (u + v)$ ist ebenfalls anisotrop. Somit liegt hier der zweite Fall vor, der im Beweis von Satz 9 gezeigt wurde.

Bemerkung: Im Beweis von Satz 9 wurden in der Vorlesung die beiden Fälle behandelt (1) es gibt einen anisotropen Fixvektor zu s und (2) es gibt ein anisotropes $v \in V$, mit der Eigenschaft, dass $sv - v$ ebenfalls anisotrop ist. Wenn V anisotrop ist, gilt immer (1) oder (2). Ist V isotrop, sind die Teilbeweise weiterhin gültig, es sind aber neben (1) und (2) noch weitere Fälle zu berücksichtigen.

(G 51)

Es gilt folgender Satz: Eine Isometrie s ist genau dann als Produkt von weniger als $n = \dim V$ Spiegelungen darstellbar, wenn s einen Fixvektor $0 \neq v \in V$ besitzt.
Eine Richtung ($\Leftarrow$) dieser Äquivalenz wurde bereits in der Vorlesung (für v anisotrop) behandelt, nun soll auch die umgekehrte Richtung gezeigt werden.

(a) Seien $H_1, \ldots, H_r$, $1 \le r \le n$, Hyperebenen in V. Beweisen Sie:

$$\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_r) \ge n - r.$$

(b) Weisen nun nach: Ist $s = s_1 \cdots s_r$, mit $r < n$, und Spiegelungen s_i an Hyperebenen $H_i \subset V$, so gibt es einen Vektor $0 \neq v \in V$ mit $sv = v$.

(c) Vervollständigen Sie die Beweisrichtung ($\Leftarrow$) aus der Vorlesung, indem Sie zeigen: Gibt es zu s einen isotropen Vektor $0 \neq v \in V$ mit $sv = v$, so existiert auch ein anisotroper Fixvektor für s. *(Hinweis: Betrachten Sie eine hyperbolische Ebene, die v enthält.)*

LÖSUNG:

(a) Beweis per Induktion. $r = 1$: eine Hyperebene hat Dimension $n - 1$. Induktionsschritt: Da $\dim H_r = n - 1$ kann der Schnitt von $r - 1$ Hyperebenen $H_1 \cap \cdots \cap H_{r-1}$ höchstens einen 1-dimensionalen Teilraum enthalten, der nicht in H_r enthalten ist. Damit folgt

$$\dim\big((H_1 \cap \cdots \cap H_{r-1}) \cap H_r\big) \ge \dim\big(H_1 \cap \cdots \cap H_{r-1}\big) - 1 \ge n - r - 1 - 1 = n - r.$$

(b) Da $r < n$ ist nach (a) die Dimension von $H_1 \cap \cdots \cap H_r$ mindestens 1. Es gibt also einen Vektor $v \in H_1 \cap \cdots \cap H_r$, mit $v \neq 0$. Dann gilt

$$s_1 \cdots s_{r-1} s_r v \overset{v \in H_r}{=} s_1 \cdots s_{r-1} v = \cdots \overset{v \in H_2}{=} s_1 v \overset{v \in H_1}{=} v,$$

da für $i = 1, \ldots, r$ die Spiegelung s_i jeden Vektor aus H_i fixiert.

(c) Sei v ein isotroper Fixvektor von s. Da V nicht ausgeartet ist, gibt es eine $u \in V$, mit $b_q(v, u) = 1$ und $q(u) = q(v) = 0$. Die von u und v aufgespannt hyperbolische Ebene H lässt sich orthogonal von V abspalten: $V = H \perp W$. Es gilt $b_q(sv, su) = b_q(v, u) = 1$, da s Isometrie. Es folgt $b_q(sv, su) = b_q(v, su) = 1$ (da s v fixiert). Also ist $sv \in H$. Da $sv = v$ ergibt sich $su = u$ (su muss isotrop sein, vgl. (G 50). Dann ist aber auch $u + v = su + sv = s(u + v)$ ein *anisotroper* Fixvektor von s.

(G 52)

Sei (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum über $\mathbb{K}$, mit $\dim V = n$.

(a) Zeigen Sie: Ist n ungerade, so besitzt jedes $s \in SO(V, q)$ einen Fixvektor ungleich 0.

(b) Wie lautet die analoge Aussage für gerades n?

LÖSUNG:

(a) Ist t eine Spiegelung, so gilt bekanntlich $\det t = -1$. Ist also s das Produkt von r Spiegelungen, so ist $\det s = (-1)^r$. Da per Definition $s \in SO(V, q) \Rightarrow \det(s) = 1$, muss r gerade sein. Insbesondere (da $r \le n$) ist $r < n$. Nach Aufgabe (G 51) bedeutet dies, dass s einen Fixvektor $\neq 0$ hat.

(b) Analog zu (a) ergibt sich für gerades n: Ist $s \in O(V, q)$ und $\det(s) = -1$ so besitzt s einen Fixvektor $v \neq 0$.

(G 53)

Sei (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum über $\mathbb{K}$. Geben sie (mit Nachweis) eine Isometrie $s : V \to V$ an, die sich nicht als Produkt von weniger als $n = \dim V$ Spiegelungen darstellen lässt.

Lösung:

Ein Beispiel für eine solche Isometrie ist $-id_V$. Beweis: $-id_V$ hat keinen Fixvektor ungleich 0. Aus Aufgabe (G 51) und Satz 9 folgt somit, dass $-id_V$ sich nicht als Produkt von $r < n$ Spiegelungen darstellen lässt (wohl aber von n Spiegelungen).

(G 54) Drehungen in der Ebene

Sei nun (V, q) ein nicht ausgearteter quadratischer Raum der Dimension 2. Zeigen Sie: Für eine Isometrie $s : V \to V$, $s \neq id_V$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. $s \in SO(V, q)$.
2. s ist Produkt von genau zwei Spiegelungen,
3. 0 ist der einzige Fixvektor von s.

Lösung:

Zunächst (1) $\Leftrightarrow$ (2): $s \in SO(V, q) \Leftrightarrow \det(s) = 1$ per Definition. $\det(s) = 1$ ist wiederum gleichbedeutend mit s ist Produkt einer geraden Anzahl ($= 2$, da $\leq \dim V$) Spiegelungen.

(2) $\Rightarrow$ (3): Beweis durch Widerspruch: Angenommen es gibt einen Fixvektor $v \neq 0$. Es folgt $s(\alpha v) = \alpha v$ für jedes α in K, also lässt s eine Gerade (= Hyperebene!) fest. Somit ist s die Spiegelung an dieser Geraden. Widerspruch!

(3) $\Rightarrow$ (2): Angenommen: s ist nicht Produkt von 2 Spiegelungen, also, da $s \neq id_V$, s ist *eine* Spiegelung. Dann lässt s eine Hyperebene (hier: Gerade) fest. Widerspruch!

(G 55)

Sei (V, q) eine nicht ausgearteter quadratischer Raum über $\mathbb{K}$. Beweisen Sie folgenden Satz: Ist s eine Isometrie, für welche die Menge $\{x \in V;\, sx = x\}$ eine Hyperebene $H \subset V$ ist, dann ist H nicht ausgeartet (und somit $s = s_H$).
Anleitung: Nehmen Sie an, H ist ausgeartet.

(a) Zeigen Sie: $H \cap H^\perp = H^\perp$.

(b) Betrachten Sie die orthogonale Zerlegung $H = H^\perp \perp W$, mit W nicht ausgeartet. Zeigen Sie dann: $W^\perp$ ist eine hyperbolische Ebene.

(c) Leiten Sie nun den Widerspruch $s = id_V$ her.

Annahme: H ist ausgeartet. Also gibt es ein $v \in H$ mit $b_q(v, w) = 0$ für jedes $w \in H$. Somit liegt der Vektor v in $H^\perp$. Da andererseits H eine Hyperebene (und V nicht ausgeartet ist), ist $\dim H^\perp = 1$. Also gilt

$$H \cap H^\perp = H^\perp.$$

Nun gibt es eine Zerlegung $H = H^\perp \perp W$, mit $\dim W = n - 2$. W ist nicht ausgeartet, denn aus der Annahme es gibt ein $u \in W$ mit $b_q(u, w) = 0$ für alle $w \in W$ folgt $b_q(u, v) = 0$ für jedes $v \in H$ und damit der Widerspruch $u \in H^\perp$.

Also ist $W^\perp$ ein nicht ausgearteter 2-dimensionaler Teilraum von V. Es gilt $H^\perp \subseteq W^\perp$. Somit gibt es einen isotropen Vektor $u \neq 0$ in W (denn $u \in H^\perp = H^\perp \cap H \Rightarrow b_q(u, u) = 0$). Folglich ist $W^\perp$ eine hyperbolische Ebene und es gibt ein $v \in W^\perp$, so dass u,v eine hyperbolische Basis bilden. Da $u \in H$ gilt $su = u$ folglich auch $sv = v$ (vgl. (G 50)). Also lässt s $W^\perp$ punktweise fest und ebenso W (da $\subset H$). Also ist $s = id_V$, und s lässt *alle* Punkte in V fest. *Widerspruch!*

Hausübungen

(H 26)

Wiederholen Sie den Stoff der Linearen Algebra und bearbeiten Sie alle Aufgaben, die Sie bisher ausgelassen haben.