Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Erik Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008

Lineare Algebra II

12. Übung

Gruppenübungen

(G 45)

Die quadratische Form q auf dem n-dimensionalen reellen Vektorraum V sei bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ durch die Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ gegeben. Gibt es eine Basis $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ von V bezüglich welcher die quadratische Form durch eine Diagonalmatrix $D' = (b_1, \dots, b_n)$ mit $b_i \in \{-1, 0, 1\}$ gegeben ist? Wenn ja, wie lautet die Transformationsmatrix $S = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$ von der alten in die neue Basis?

(G 46) Symmetrischer Gaußalgorithmus

Führen Sie den *symmetrischen Gaußalgorithmus* für die symmetrischen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

durch, indem sie gleich nach einer Zeilenoperation die zugehörige Spaltenoperation ausführen - bis Sie eine Diagonalmatrix erhalten. Welche Form hat die neu erhaltene Matrix nach Ausführen der Spalten und Zeilenoperationen?

(G 47)

(a) Geben Sie die Transformationsmatrizen für jeden Schritt in Aufgabe G 46 an.

(b) Geben Sie Transformationsmatrix an, mit denen Sie in der 1. Spalte unter der Diagonalen Nullen erzeugen. Geben Sie Transformationsmatrix an, mit denen Sie in der 2. Spalte unter der Diagonalen Nullen erzeugen.

(c) Geben Sie die Gesamttransformationsmatrizen an.

(G 48)

Es sei A eine symmetrische reelle Matrix mit Einträgen a_{ij} und q die assoziierte quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Geben Sie den Wert $q(\lambda \vec{e}_i + \mu \vec{e}_j)$ mit Hilfe der a_{ij} an.

(b) Es gelte $a_{11} = 0$ und $a_{1j} \neq 0$ für ein j. Beweisen Sie, daß es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften $v_1 = 1$ und $q(\vec{v}) \neq 0$ gibt.

(c) Beweisen Sie, daß Sie im Falle $a_{11} = 0$ und $a_{1j} \neq 0$ eine Matrix S finden, so daß der Eintrag a'_{11} von $A' = S^T A S$ nicht verschwindet.

(G 49)

Man Beweise, daß es zu jeder reellen symmetrischen Matrix A eine ivertierbare Matrix S gibt, so daß $S^T A S$ eine Diagonalmatrix ist.