Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Erik Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008

Lineare Algebra II

12. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 45)

Die quadratische Form q auf dem n-dimensionalen rellen Vektorraum V sei bezüglich der Bais $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ durch die Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ gegeben. Gibt es eine Basis $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ von V bezüglich welcher die quadratische Form durch eine Diagonalmatrix $D' = (b_1, \dots, b_n)$ mit $b_i \in \{-1, 0, 1\}$ gegeben ist? Wenn ja, wie lautet die Transformationsmatrix $S = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$ von der alten in die neue Basis?

Lösung:

Man setze $a'_i = \sqrt{|a_i|}$ für $a_i \neq 0$, $a'_i = 1$ falls $a_i = 0$ und nehme die Vektoren $a'_1 v_1, \dots, a_n v'_n$ als neue Basis. Die Transformationsmatrix lautet somit $S = \operatorname{diag}(\frac{1}{a'_1}, \dots, \frac{1}{a'_n})$ und es gilt $S^T A S = D'$, wobei D' die geforderten Eigenschaften hat.

(G 46) Symmetrischer Gaußalgorithmus

Führen Sie den *symmetrischen Gaußalgorithmus* für die symmetrische Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

durch, indem sie gleich nach einer Zeilenoperation die zugehörige Spaltenoperation ausführen - bis Sie eine Diagonalmatrix erhalten. Welche Form hat die neu erhaltene Matrix nach Ausführen der Spalten und Zeilenoperationen?

Lösung:

ZU A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.Spalte-2*1.Spalte} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.Zeile-2*1.Zeile} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ZU B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.Spalte-2*1.Spalte} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.Spalte-3*1.Spalte} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2.Zeile-2*1.Zeile} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.Zeile-3*1.Zeile} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3.Spalte-2*2.Spalte} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.Zeile-2*2.Zeile} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die neu erhaltenen Matrizen sind wieder symmetrisch.

(G 47)

(a) Geben Sie die Transformationsmatrizen für jeden Schritt in Aufgabe G 46 an.

(b) Geben Sie Transformationsmatrix an, mit denen Sie in der 1. Spalte unter der Diagonalen Nullen erzeugen. Geben Sie Transformationsmatrix an, mit denen Sie in der 2. Spalte unter der Diagonalen Nullen erzeugen.

(c) Geben Sie die Gesamttransformationsmatrizen an.

LÖSUNG:

(a) Zu A:

$$\begin{aligned} \text{2. Spalte - 2 * 1. Spalte} &: \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{2. Zeile - 2 * 1. Zeile} &: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = S^T \end{aligned}$$

Es folgt $S^T AS = \mathrm{diag}(1, -3)$.

Zu B:

$$\begin{aligned} \text{2. Spalte - 2 * 1. Spalte} &: \quad S_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{3. Spalte - 3 * 1. Spalte} &: \quad S_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{2. Zeile - 2 * 1. Zeile} &: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_{1,2}^T \\ \text{3. Zeile - 3 * 1. Zeile} &: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_{1,3}^T \\ \text{3. Spalte - 2 * 2. Spalte} &: \quad S_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{3. Zeile - 2 * 2. Zeile} &: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = S_{2,3}^T \end{aligned}$$

(b) Für A ist S_1 die gesuchte Matrix. Für B ergeben sich die gesuchten Matrizen wie folgt:

$$S_1 := S_{1,2}S_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = S_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Die Gesamttransformationsmatrizen sind S für A und $S_1S_2S_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für B.

(G 48)

Es sei A eine symmetrische relle Matrix mit Eintraägen a_{ij} und q die assoziierte quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Geben Sie den Wert $q(\lambda\vec{e}_i + \mu\vec{e}_j)$ mit Hilfe der a_{ij} an.

(b) Es gelte $a_{11} = 0$ und $a_{1j} \neq 0$ für ein j. Beweisen Sie, daß es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften $v_1 = 1$ und $q(\vec{v}) \neq 0$ gibt.

(c) Beweisen Sie, daß Sie im Falle $a_{11} = 0$ und $a_{1j} \neq 0$ eine Matrix S finden, so daß der Eintrag a'_{11} von $A' = S^T AS$ nicht verschwindet.

LÖSUNG:

(a) Es gilt $q(\lambda\vec{e}_i + \mu\vec{e}_j) = \lambda^2 a_{11} + \lambda\mu a_{1j} + \lambda\mu a_{j1} + \mu^2 a_{22} = \lambda^2 a_{11} + 2\lambda\mu a_{1j} + \mu^2 a_{22}$.

(b) Gilt $a_{jj} = 0$, so kann man $v = \vec{e}_1 + \vec{e}_j$ wählen. Im Falle $a_{jj} \neq 0$ muß die quadratische Gleichung $\mu^2 a_{jj} + 2\mu a_{1j} + 1 \neq 0$ erfüllt sein. Dies ist für große μ immer der Fall. Somit gibt es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften $v_1 = 1$ und $q(\vec{v}) \neq 0$.

(c) Man wähle $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ v_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

(G 49)

Man Beweise, daß es zu jeder reellen symmetrischen Matrix A eine Matrix S gibt, so daß $S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.

LÖSUNG:

Dies kann man mit dem symmetrischen Gaußalgorithmus immer erreichen. Tritt dabei einmal ein Fall wie in Aufgabe G 48 b) auf, so kann man dies analog zu der dort angegeben Matrix beheben.