Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Erik Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 6.10.2007

Lineare Algebra II

11. Übung

Gruppenübungen

(G 41) Diagonalisierbarkeit

Mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist die quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$Q_A(x) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

assoziiert.

(a) Geben Sie die Matrix A an und entscheiden Sie, ob A positiv oder negativ definit ist.

(b) Begründen Sie, warum die Matrix A diagonalähnlich ist und geben Sie eine geeignete invertierbare Transformationsmatrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $S^{-1} \cdot A \cdot S = D$ an, wobei $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Diagonalmatrix bildet.

(G 42) Quadratische Formen

Gegeben sei die quadratische Form $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz$ auf $\mathbb{R}^3$.

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ an, so daß $q(x, y, z) = (x, y, z)A(x, y, z)^T$ gilt.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S derart, daß $S^\top AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Bestimmen Sie $\tilde{q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})D(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})^T$, wobei D die Diagonalmatrix aus Aufgabenteil b) ist. ($\tilde{q}$ ist die Hauptachsenform der quadratischen Form q, wobei $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x, y, z)S$ mit S aus Aufgabenteil b) gilt.)

Definition (Wiederholung): Eine Teilmenge $Q \subset V$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V heißt *Quadrik*, falls sie die Lösungsmenge einer Gleichung

$$q(v) + f(v) + c = 0$$

mit einer quadratischen Form q einer Linearform f und einem Skalar $c \in \mathbb{K}$ ist.

(G 43) Wiederholung

Wir betrachten die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = x^2 - y^2$. Ist h eine Quadrik eine Bilinearform oder eine quadratische Form? Skizzieren Sie die Kennlinie $Q = \{(x, y) \mid h(x, y) = 1\}$. Ist Q eine Quadrik?

(G 44) Wiederholung

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad c = \frac{1}{3}.$$

Von welchem Kurventyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T A x + b^T x + c = 0?$$

Skizzieren Sie die Lösungsmenge im ursprünglichen Koordinatensystem.

Hausübungen

(H 24)

Wir betrachten in $\mathbb{R}^2$ die Menge $\mathcal{Q}$ der quadratischen Kurven, welche durch eine Gleichung der Gestalt

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

gegeben sind. Zwei solche Kurven heißen *äquivalent*, wenn es einen Isomorphismus $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, welche die eine Kurve in die andere überführt.

Zeigen Sie, daß dies eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{Q}$ ist, und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen.

(H 25)

Für die Quadrik Q gelte

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1\}.$$

Welche geometrischen Objekte treten auf, wenn mindestens eins der λ_i gleich Null ist?

(H 26) Quadriken

Für die Quadrik Q gelte

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = 0\},$$

Welche geometrischen Objekte treten für $n = 2$ und $n = 3$ auf, wenn alle λ_i ungleich Null sind?