Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Erik Hofmann
Fredrik Strömberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 6.10.2007

Lineare Algebra II

11. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 41) Diagonalisierbarkeit

Mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist die quadratische Form $Q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnungsvorschrift

$$Q_A(x) = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

assoziiert.

(a) Geben Sie die Matrix A an und entscheiden Sie, ob A positiv oder negativ definit ist.

(b) Begründen Sie, warum die Matrix A diagonalähnlich ist und geben Sie eine geeignete invertierbare Transformationsmatrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $S^{-1} \cdot A \cdot S = D$ an, wobei $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Diagonalmatrix bildet.

LÖSUNG:

(a) Die zur quadratischen Form Q_A gehörige Matrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Um zu zeigen, daß A positiv definit ist, genügt es nach Satz 13.11 auf S.71 im Skript zur Linearen Algebra nachzuweisen, daß die *Hauptunterdeterminanten*

$$D_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

für $i = 1, 2, 3$ positiv sind. Wir erhalten

$$D_1 = \det(7) = 7 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 38 > 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 162 > 0$$

und somit ist A *positiv definit*. Alternativ hätten wir (ebenfalls nach Satz 13.11) zeigen können, daß sämtliche Eigenwerte von A positiv sind. Das *charakteristische Polynom* von A besitzt die Darstellung

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= (-1)^3 \cdot \det(A - \lambda I) \\
&= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7\text{-}\lambda & \text{-}2 & 0 \\ \text{-}2 & 6\text{-}\lambda & \text{-}2 \\ 0 & \text{-}2 & 5\text{-}\lambda \end{vmatrix} \\
&= (-1) \cdot [(7-\lambda)\cdot(6-\lambda)\cdot(5-\lambda) - 4\cdot(7-\lambda) - 4\cdot(5-\lambda)] \\
&= \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 \\
&= (\lambda - 3)\cdot(\lambda - 6)\cdot(\lambda - 9)
\end{aligned}$$

und somit erhalten wir die *Eigenwerte*

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 9,$$

welche alle positiv sind.

(b) Da es sich bei A um eine *symmetrische* Matrix handelt, folgt die *Diagonalähnlichkeit* von A, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und ein Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D.$$

Dabei sind die Diagonalelemente von D die Eigenwerte von A und die Spalten von S setzen sich aus den zugehörigen Eigenvektoren zusammen. Da wir die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 9,$$

im vorigen Aufgabenteil bereits bestimmt haben, ist nun noch für $i = 1, 2, 3$ zu jedem Eigenwert λ_i *ein* Eigenvektor x_i zu ermitteln, wobei darauf hingewiesen sei, daß jeder Eigenwert eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda_i)$ bildet und somit nach Bemerkung (7) auf S.66 a.a.O. der Kern von $A - \lambda_i I$ eindimensional ist. Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

$\underline{\lambda_1 = 3:}$ Hier ist *eine* Lösung des Gleichungssystems

$$(A - 3I)\cdot x_1 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen, wozu das Gauß-Jordan-Verfahren verwendet werden soll:

	4	-2	0	0
	-2	3	-2	0
	0	-2	2	0
	4	-2	0	0
Z2+$\left(\frac{1}{2}\right)$·Z1	0	2	-2	0
	0	-2	2	0
Z1+Z2	4	0	-2	0
	0	2	-2	0
Z3+Z2	0	0	0	0
Z1·$\left(\frac{1}{4}\right)$	1	0	-$\frac{1}{2}$	0
Z2·$\left(\frac{1}{2}\right)$	0	1	-1	0
	0	0	0	0

Somit ist $x_{1,3}$ frei wählbar und wir erhalten

$$x_{1,2} = x_{1,3} \quad \text{und} \quad x_{1,1} = \frac{1}{2} x_{1,3}.$$

Wählt man beispielsweise

$$x_{1,3} = 2,$$

so bildet

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $(A - 3I) \cdot x_1 = 0$ und ist somit *ein* Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$.

$\underline{\lambda_2 = 6}$: Zu betrachten ist das Gleichungssystem

$$(A - 6I) \cdot x_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauß-Jordan-Verfahren folgt

	1	-2	0	0
	-2	0	-2	0
	0	-2	-1	0
	1	-2	0	0
Z2+2·Z1	0	-4	-2	0
	0	-2	-1	0
Z1+$(-\frac{1}{2})$Z2	1	0	1	0
	0	-4	-2	0
Z3+$(-\frac{1}{2})$Z2	0	0	0	0
	1	0	1	0
Z2· $(-\frac{1}{4})$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
	0	0	0	0

Hier ist $x_{2,3}$ frei wählbar und es folgt

$$x_{2,2} = -\frac{1}{2} x_{2,3} \quad \text{und} \quad x_{2,1} = -x_{2,3}.$$

Wird nun beispielsweise

$$x_{2,3} = 2$$

gewählt, dann ist

$$x_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $(A - 6I) \cdot x_2 = 0$ und ist damit zugleich *ein* Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 6$.

$\underline{\lambda_3 = 9}$: In diesem Fall ist *eine* Lösung des Gleichungssystems

$$(A - 9I) \cdot x_3 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

zu ermitteln. Mit dem Gauß-Jordan-Verfahren folgt

	-2	-2	0	0
	-2	-3	-2	0
	0	-2	-4	0
	-2	-2	0	0
Z2-Z1	0	-1	-2	0
	0	-2	-4	0
Z1+(-2)·Z2	-2	0	4	0
	0	-1	-2	0
Z3+(-2)·Z2	0	0	0	0
Z1· $(-\frac{1}{2})$	1	0	-2	0
Z2·(-1)	0	1	2	0
	0	0	0	0

Damit ist $x_{3,3}$ frei wählbar und es gilt

$$x_{3,2} = -2x_{3,3} \quad \text{und} \quad x_{3,1} = 2x_{3,3}.$$

Setzen wir beispielsweise

$$x_{3,3} = 1,$$

dann erhalten wir mit

$$x_3 = \begin{pmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $(A - 9I) \cdot x_3 = 0$, die zugleich auch *einen* Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 9$ darstellt.

Setzen wir nun

$$S := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

dann erhalten wir mit

$$S^{-1} := \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

schließlich die gewünschte Darstellung der Form

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D.$$

(G 42) Quadratische Formen

Gegeben sei die quadratische Form $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz$ auf $\mathbb{R}^3$.

(a) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ an, so daß $q(x, y, z) = (x, y, z)A(x, y, z)^T$ gilt.

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S derart, daß $S^\top AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Bestimmen Sie $\tilde{q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})D(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})^T$, wobei D die Diagonalmatrix aus Aufgabenteil b) ist. ($\tilde{q}$ ist die Hauptachsenform der quadratischen Form q, wobei $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x, y, z)S$ mit S aus Aufgabenteil b) gilt.)

LÖSUNG:

(a) Es gilt:

$$Q(x,y,z) = (x,y,z) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=:\,A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(b) Wir suchen eine orthogonale Matrix S, so daß $S^{-1}AS = S^{\top}AS =: D$ Diagonalgestalt hat. Da A symmetrisch ist, wissen wir nach Satz 6.10 (Seite 188), daß D Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ von A in der Diagonalen ist und daß die Spalten von S ein orthonormiertes Eigenvektorsystem zu A bilden.
Daher berechnen wir zunächst die Eigenwerte von A und bestimmen das zugehörige orthonormierte Eigenvektorsystem.
Es gilt:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= Det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - 4(1-\lambda) - 4(3-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1), \end{aligned}$$

somit sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ und $\lambda_3 = -1$ die Eigenwerte von A.
Wir bestimmen den Eigenvektor v_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ mit Länge 1, d.h. $\|v_1\| = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist $u_1 = (-2,1,2)^{\top}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$. Normiere u_1 auf die Länge 1:

$$\|u_1\| = \sqrt{4+1+4} = 3 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{3}(-2,1,2)^{\top}.$$

Entsprechend berechnen wir Eigenvektoren v_2 und v_3 zu den Eigenwerten λ_2 bzw. λ_3 der Länge 1 und erhalten:

$$v_2 = \frac{1}{3}(1,-2,2)^{\top} \quad \text{und} \quad v_3 = \frac{1}{3}(2,2,1)^{\top}.$$

Damit ergeben sich die Diagonalmatrix D und die orthogonale Matrix S:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = (v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $S^{\top}AS = S^{-1}AS = D$.

(c) Es gilt:

$$\tilde{Q}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) D \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \begin{pmatrix} 2\tilde{x} \\ 5\tilde{y} \\ -\tilde{z} \end{pmatrix} = 2\tilde{x}^2 + 5\tilde{y}^2 - \tilde{z}^2.$$

$\tilde{Q}$ ist die Hauptachsenform der quadratischen Form Q, da

$$Q(x,y,z) = (x,y,z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x,y,z)SS^\top ASS^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$= (S^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})^\top DS^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

mit $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = (x,y,z)S$.

Definition (Wiederholung): Eine stetige Abbildung $q : V \to \mathbb{K}$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißt *quadratische Form*, falls die Gleichung $q(v+w)+q(v-w) = 2[q(v)+q(w)]$ für alle $v, w \in V$ erfüllt ist. Eine Teilmenge $Q \subset V$ heißt *Quadrik*, falls sie die Lösungsmenge einer Gleichung

$$q(v) + f(v) + c = 0$$

mit einer quadratischen Form q einer Linearform f und einem Skalar $c \in \mathbb{K}$ ist.

(G 43) Wiederholung

Wir betrachten die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 - y^2$. Ist h eine Quadrik eine Bilinearform oder eine quadratische Form? Skizzieren Sie die Kennlinie $Q = \{(x,y) \mid h(x,y) = 1\}$. Ist Q eine Quadrik?

Lösung:

Die Abbildung h ist eine quadratische Form. Die Kennlinie Q besteht aus den zwei Hyperbeln $x = \pm\sqrt{1+y^2}$. Sie ist die Nullstellenmenge der Gleichung $h(x,y) - 1 = 0$ und somit eine Quadrik.

(G 44) Wiederholung

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{3}.$$

Von welchem Kurventyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T Ax + b^T x + c = 0?$$

Skizzieren Sie die Lösungsmenge im ursprünglichen Koordinatensystem.

Lösung:

Die Matrix A besitzt den Eigenwert 1 mit Eigenvektor $(1,1)^T$ und den Eigenwert 3 mit Eigenvektor $(-1,1)^T$. Seien $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ und $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$ die normierten Eigenvektoren. Dann ist

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Transformationsmatrix für den Wechsel zur Orthonormalbasis e_1, e_2. Sei $d = C^T b = (0,-4)$. In der neuen Basis (mit neuer Variablen y) lautet die Gleichung dann

$$(Cy)^T ACy + b^T Cy + c = 0$$

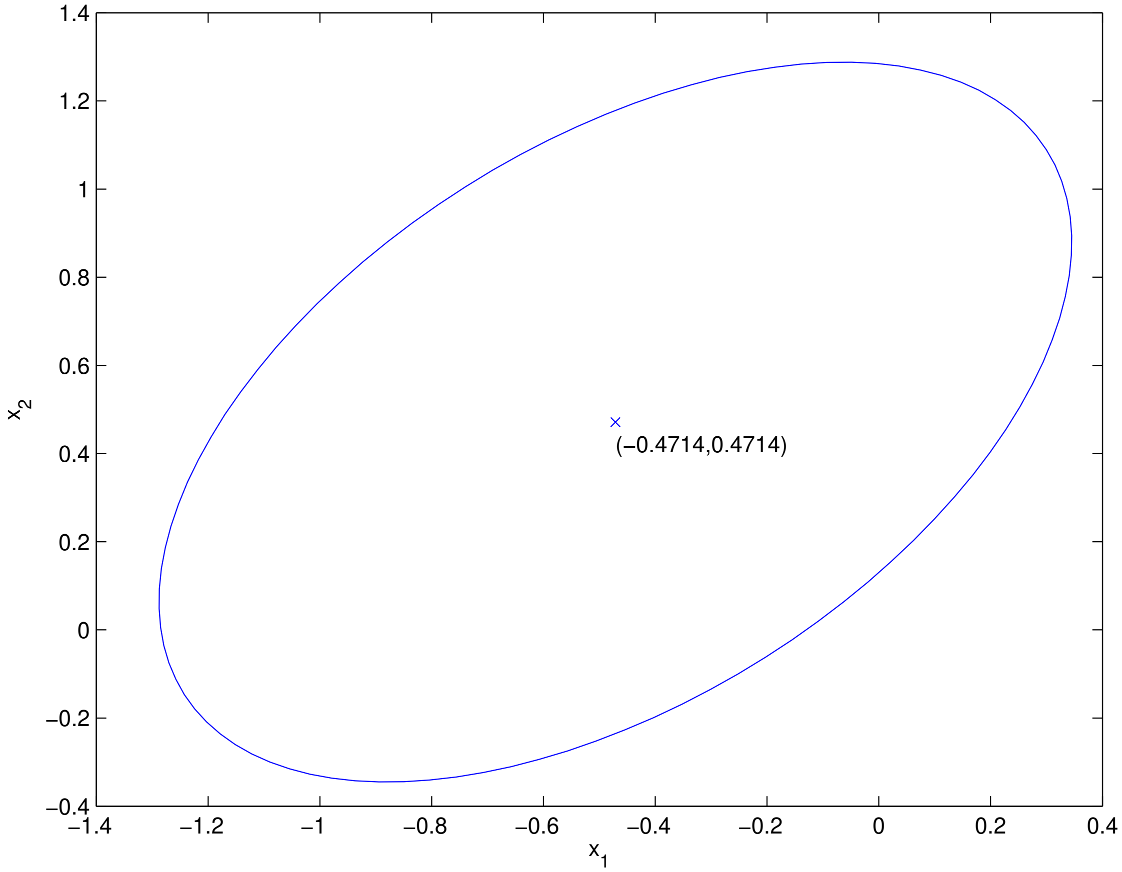

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe T35

bzw.

$$y^T C^T A C y + b^T C y + c = 0$$

oder ausgeschrieben

$$y_1^2 + 3y_2^2 - 4y_2 + \frac{1}{3} = 0.$$

Um das Linearglied $-4y_2$ zu beseitigen, führt man eine quadratische Ergänzung durch:

$$y_1^2 + 3\left(y_2^2 - \frac{4}{3}y_2\right) + \frac{1}{3} = y_1^2 + 3\left(y_2^2 - \frac{4}{3}y_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{1}{3}$$

$$= y_1^2 + 3\left(y_2 - \frac{2}{3}\right)^2 - 1.$$

Setzt man nun $z_1 := y_1$ und $z_2 := y_2 - \frac{2}{3}$, dann lautet die Gleichung in den neuen Variablen

$$z_1^2 + 3z_2^2 = 1.$$

Folglich ist die Lösungsmenge eine *Ellipse*. Bezüglich der z-Koordinaten liegt das Zentrum im Nullpunkt. Daher liegt es bezüglich der y-Koordinaten im Punkt $(0, \frac{2}{3})$ und der x-Koordinaten im Punkt $(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$. Die Vektoren e_1 und e_2 geben die Richtung der Achsen der Ellipse an. Die Halbachsen haben die Länge 1 und $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Skizze siehe Abbildung .

Hausübungen

(H 24)

Wir betrachten in $\mathbb{R}^2$ die Menge $\mathcal{Q}$ der quadratischen Kurven, welche durch eine Gleichung der Gestalt

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

gegeben sind. Zwei solche Kurven heißen *äquivalent*, wenn es einen Isomorphismus $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, welche die eine Kurve in die andere überführt.

Zeigen Sie, daß dies eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{Q}$ ist, und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen.

LÖSUNG:

Für Kurven Q und Q' (die ja Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ sind) betrachten wir die Relation $\sim$ definiert wie folgt: $Q \sim Q'$ wenn es eine invertierbare lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gibt mit $Q = \phi(Q')$.

Wir zeigen zuächst, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist:

Reflexivität: $Q = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(Q)$.

Symmetrie: Wenn $Q = \phi(Q')$, dann $Q' = \phi^{-1}(Q)$. Somit folgt aus $Q \sim Q'$ auch $Q' \sim Q$.

Transitivität: Es sei $Q \sim Q'$ und $Q' \sim Q''$. Dann gibt es $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $Q = \phi(Q')$ und $Q' = \psi(Q'')$. Daraus ergibt sich $Q = \phi(\psi(Q'')) = (\phi \circ \psi)(Q'')$ wobei $\phi \circ \psi$ wieder invertierbar ist. Also $Q \sim Q''$.

Es gibt die die vier Äquivalenzklassen, die jeweils aus allen

1. Ellipsen
2. Hyperbeln
3. Geradenpaaren
4. der leeren Kurve

bestehen.

Dies folgt direkt aus der Hauptachsentranformation (Lineare Algebra II) für quadratische Formen, die ja besagt, dass man jede quadratische Form (nichts anderes ist $ax^2 + bxy + cy^2$) durch eine orthogonale Basistransformation S in die Gestalt $\lambda x^2 + \mu y^2$ transformieren kann, wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ersetzt man nun noch x durch $x/\sqrt{|\lambda|}$ und y durch $y/\sqrt{|\mu|}$, erhält man: $\mathrm{sgn}(\lambda)x^2 + \mathrm{sgn}(\mu)y^2$.

Das bedeutet, dass jede Kurve Q durch die invertierbare Abbildung

$$S \begin{pmatrix} 1/\sqrt{|\lambda|} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{|\mu|} \end{pmatrix}$$

in eine Kurve überführt werden kann, die der Gleichung $\mathrm{sgn}(\lambda)x^2 + \mathrm{sgn}(\mu)y^2 = 1$ genügt. Damit bekommt man die folgenden vier Fälle:

1. $\lambda > 0$, $\mu > 0$: die Kurve ist eine Ellipse.
2. $\lambda > 0$, $\mu < 0$: die Kurve ist eine Hyperbel.
3. $\lambda > 0$, $\mu = 0$: die Kurve ist ein Paar von Geraden.
4. $\lambda < 0$, $\mu < 0$: die Kurve ist leer.

(H 25)

Für die Quadrik Q gelte

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1\}.$$

Welche geometrischen Objekte treten auf, wenn mindestens eins der λ_i gleich Null ist?

LÖSUNG:

Essei $\lambda_3 = 0$. Dann taucht x_3 nicht mehr in der definierenden Gleichung auf und ist daher frei wählbar. In der x_1x_2-Ebene ergibt sich eine der zweidimensionalen Quadriken (Ellipse, Hyperbel, Parallelen oder die leere Menge). Folglich ist Q ein Zylinder mit eine der zweidimensionalen Quadriken als Grundfläche.

(H 26) Quadriken

Für die Quadrik Q gelte

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = 0\},$$

Welche geometrischen Objekte treten für $n = 2$ und $n = 3$ auf, wenn alle λ_i ungleich Null sind?

LÖSUNG:

Es sei zunächst $n = 2$. Dann lautet die definierende Gleichung

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0.$$

Für den Fall, daß $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ oder $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ gilt, ist der Punkt $(0, 0)$ die einzige Lösung. Folglich ist die Quadrik Q nur ein Punkt.

Für den Fall $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$ (bzw. $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$) definiere $a := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}$ und $b := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x_1^2}{a^2} = \frac{x_2^2}{b^2} \\
\Leftrightarrow \quad & x_2 = \pm \frac{b}{a} x_1.
\end{aligned}$$

Folglich besteht die Quadrik Q aus zwei Geraden mit der Steigung $\pm\frac{b}{a}$. Dies sind gerade die Asymptoten, der Hyperbeln, die sich ergeben, wenn die rechte Seite der definierenden Gleichung gleich Eins ist.

Sei nun $n = 3$. Dann lautet die definierende Gleichung

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0.$$

Für den Fall, daß alle λ_i das gleiche Vorzeichen besitzen, ist der Punkt $(0, 0, 0)$ die einzige Lösung. Folglich ist die Quadrik Q nur ein Punkt.

Für den Fall, daß die λ_i unterschiedliche Vorzeichen besitzen, betrachten wir den Fall $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ und $\lambda_3 < 0$ und definieren $a := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}$, $b := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}$ und $c := \frac{1}{\sqrt{|\lambda_3|}}$. (Die übrigen Fälle können durch Umnummerierung auf diesen zurückgeführt werden.) Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = \frac{x_3^2}{c^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}} = \frac{|x_3|}{c}
\end{aligned}
$$

Folglich ist die Quadrik Q ein Doppelkegel mit elliptischer Grundfläche. Es ist genau der asymptotische Kegel, der Hyperboloide, die sich ergeben, wenn die rechte Seite der definierenden Gleichung gleich Eins ist.