Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

Sommersemester 2008
June 9, 2008

Lineare Algebra II

10. Übung

Gruppenübungen

(G 41)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper mit $Char(\mathbb{K}) \neq 2$ und V ein $2n$-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine symplektische Bilinearform, $\omega \equiv 0$. Zeigen Sie, daß die Strukturmatrix für β in ein geeignete Basis von V die Form

$$B = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

hat, wobei E die $n \times n$ Identitätsmatrix ist.

(G 42) Symplektische Gruppen

Wenn V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ (Char$(\mathbb{K}) \neq 2$) ist und ω ein Symplektischen Bilinearform ist, sagt man daß das Paar (V, ω) ein *Symplektischesvektorraum* über $\mathbb{K}$ ist.

Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ zwischen zwei Symplektischer Vektorräumen über $\mathbb{K}$, (V, β) und $\left(W, \tilde{\beta}\right)$ heißt *symplektisch* falls

$$\tilde{\beta}\,(Lv, Lw) = \beta\,(v, w)\,, \forall v, w \in V.$$

Wenn L auch ein Isomorphismus ist heißt e*r Symplektomorphismus.* Die *symplektische Gruppe* von V ist

$$Sp\,(V) = \{L : V \to V \,|\, L \text{ ist Symplektomorphismus}\}\,.$$

Insbesondere, wenn $V = \mathbb{K}^n$ schreibt man auch $Sp_n\,(\mathbb{K})$.

(a) Zeigen Sie, daß eine symplektische Abbildung injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, daß $Sp\,(V)$ ein Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie, daß wenn β die Strukturmatrix J bzgl. einer gegebene Basis von V und L die Koordinatenmatrix A bzgl. die gleichen Basis hat, dann gilt $\det(A) = 1$ und

$$A^t JA = J$$

Man sagt dann daß die Matrix A eine *symplektische Matrix* ist.

(d) Zeigen Sie, daß die folgende Matrizen Mitglieder von $Sp_n(\mathbb{K})$ sind:

$$J, \quad \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & (B^t)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

wobei $B, S \in M_n(\mathbb{K})$ mit B invertierbar und S symmetrisch. (Die obigen Beispiele auch ein Erzeugende System von $Sp_n(\mathbb{K})$ sind aber das ist hier nicht zu beweisen.)

(e) Zeigen Sie, wenn A ein Symplektische matrix in $Sp_n(\mathbb{R})$ ist, mit Eigenwert $a \in \mathbb{C}$ dann sind $\overline{a}$, $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{\overline{a}}$ auch Eigenwerte von A.

(f) Sei $(\mathbb{K}^{2n}, \beta)$ ein Symplektischer Raum und Sei $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ die Koordinatenmatrix für β. Zeigen Sie, daß $\langle v, w \rangle = \beta(Jv, w)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^{2n}$ ist.

Hausübungen

(H 24)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper (mit Char.$\neq 2$) und V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform mit Strukturmatrix B in bezug auf ein gegebene Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V. Zeigen Sie:

(a) $\dim V^{\perp} = n - \mathrm{Rang} B = \dim^{\perp} V$.

(b) $\mathrm{Rang} B = m$ genau wenn β in der Gestalt

$$\beta(x, y) = f_1(x) g_1(y) + \cdots + f_m(x) g_m(x)$$

mit Linearformen $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_m$ auf V, für die $\mathrm{Rang}(f_1, \ldots, f_m) = \mathrm{Rang}(g_1, \ldots, g_m) = m$ darstellbar ist.

(H 25)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper mit $Char(\mathbb{K}) \neq 2$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ ein nicht ausgeartete Bilinearform auf V. Zeigen Sie, daß β genau dann schiefsymmetrisch ist (d.h. $\beta(x, y) = -\beta(y, x)\ \forall x, y \in V$) wenn es symplektisch ist (d.h. $\beta(x, x) = 0\ \forall x \in V$).