Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Eric Hofmann
Fredrik Strömberg

Sommersemester 2008
June 5, 2008

Lineare Algebra II

10. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 41)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper mit $Char(\mathbb{K}) \neq 2$ und V ein $2n$-dimensionales Vektorraum über $\mathbb{K}$. Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ ein symplektische bilinearform, $\omega \equiv 0$. Zeigen Sie, daß die Strukturmatrix für β in ein geeignete Basis von V das form

$$B = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

hat, wobei E die $n \times n$ Identitätsmatrix ist.

LÖSUNG: W

eil $\beta \not\equiv 0$ gibt's $v, w \in V$ so daß $\beta(v,w) = 1$ (und also $\beta(w,v) = -1$). Setze $e_1 = v$ und $e_{n+1} = w$. Sei dann $W = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$, $W^{\perp} = \{v \in V \mid \beta(v,w) = 0, \forall w \in W\}$ und betrachte β beschränkt zu $W^{\perp} \times W^{\perp}$. Weil β nicht null ist gibt's dann $v_1, w_1 \in W^{\perp}$ so daß $\beta(v_1, w_1) = 1$ (also $\beta(w_1, v_1) = -1$). Setze jetzt $e_2 = v_1$ und $e_{n+2} = w_1$ und sei $W = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_{n+1}, e_{n+2})$. Die resultat folgt dann durch induktion über den Dimension von W (oder $W^{\perp}$).

(G 42) Symplektische Gruppen

Wenn V ein endlich-dimensionales Vektorraum über dem körper $\mathbb{K}$ ($\mathrm{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$) ist und ω ein Symplektischen Bilinearform ist, sagt man daß das paar (V, ω) ein *Symplektischesvektorraum* über $\mathbb{K}$ ist.

Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ zwischen zwei Symplektischer Vektorräumen über $\mathbb{K}$, (V, β) und $\left(W, \tilde{\beta}\right)$ heißt *symplektisch* falls

$$\tilde{\beta}(Lv, Lw) = \beta(v,w), \forall v, w \in V.$$

Wenn L auch ein Isomorphismus ist heißt es *Symplektomorphismus.* Die *symplektische Gruppe* von V ist

$$Sp(V) = \{L : V \to V \,|\, L \text{ist Symplektomorphismus}\}.$$

Insbesonderes, wenn $V = \mathbb{K}^n$ schreibt man auch $Sp_n(\mathbb{K})$.

(a) Zeigen Sie, daß ein symplektischer Abbildung injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, daß $Sp(V)$ ein Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie, daß wenn β die Strukturmatrix J bzgl. ein gegebene basis von V und L die Koordinatenmatrix A bzgl. die gleichen Basis hat, dann gilt $\det(A) = 1$ und

$$A^t JA = J$$

Man sagt dann daß die matrix A eine *symplektische Matrix* ist.

(d) Zeigen Sie, daß die folgende Matrizen mitglieder von $Sp_n(\mathbb{K})$ sind:

$$J, \quad \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & (B^t)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

wobei $B, S \in M_n(\mathbb{K})$ mit B invertierbar und S symmetrisch. (Die obige beispiele sind auch ein Erzeugende System von $Sp_n(\mathbb{K})$ aber daß ist nicht zu beweisen.)

(e) Zeigen Sie, wenn A ein Symplektische matrix in $Sp_n(\mathbb{R})$ ist, mit Eigenwert $a \in \mathbb{C}$ dann sind $\overline{a}$, $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{\overline{a}}$ auch Eigenwerte von A.

(f) Sei $(\mathbb{K}^{2n}, \beta)$ ein Symplektische Raum und Sei $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ die Koordinatenmatrix für β. Zeigen Sie, daß $\langle v, w \rangle = \beta(Jv, w)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^{2n}$ ist.

LÖSUNG: a

) Wenn $Lv = 0$ dann gilt $\beta(v,w) = \beta(Lv, Lw) = \beta(0,w) = 0, \forall w \in W$ und weil β nicht ausgeartetet ist müss $Lv = 0$.

b) Sei $L, L' \in Sp(V)$ dann gilt $\beta(LL'v, LL'w) = \beta(L'v, L'w) = \beta(v,w)$ also ist $LL' \in Sp(V)$. Die identitäts Abildung $1 \in SP(V)$ und die inverse ist einfach die inverse von L in $\mathrm{End}(V)$.

c) $\beta(Lv, Lw) = (Lv)^t B(Lw) = v^t (L^t JL) w = \beta(v,w) = v^t Jw \Rightarrow L^t JL = J$.

d) $J^t JJ = J$, Sei $M_2 = ()$

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & (B^t)^{-1} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & (B^t)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^t & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (B^t)^{-1} \\ -B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ S^t & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & -S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & S^t - S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

e) Es ist klar daß $\overline{a}$ ist auch ein Eigenwert von A und für jede $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\det(A - \lambda E) = \det\left(A^t - \lambda E\right) = \det\left(-J\left(A^t - \lambda E\right)\right) = \det\left(A^{-1} - \lambda E\right).$$

also ist $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{\overline{a}}$ auch Eigenwert von A.

f) $\langle v, w \rangle = \beta(Jv, w) = (Jv)^t Jw = v^t J^t Jw = v^t w$, die Standardskalarprodukt am $\mathbb{K}^{2n}$.

Hausübungen

(H 24)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper (mit Char.$\neq 2$) und V ein n-dimensionales Vektorraum über $\mathbb{K}$. Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ ein Bilinearform mit Strukturmatrix B in bezug auf ein gegebene Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V. Zeigen Sie:

(a) $\dim V^\perp = n - \mathrm{Rang} B = \dim^\perp V$.

(b) $\mathrm{Rang} B = m$ genau wenn β in der gestalt

$$\beta(x, y) = f_1(x) g_1(y) + \cdots + f_m(x) g_m(x)$$

darstellbar ist mit Linearformen $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_m$ auf V, für die $\mathrm{Rang}(f_1, \ldots, f_m) = \mathrm{Rang}(g_1, \ldots, g_m) = m$ ist.

LÖSUNG:

(a) Betrachten Sie $\beta_1, \beta_2 : V \to V^*$ dann ist $\mathrm{Kern}(\beta_1) = V^\perp$ und $\mathrm{Kern}(\beta_2) = ^\perp V$. Wir wissen daß B^t bzw. B ist die Koordinatenmatrix für $\beta_1$bzw. β_2. Also gilt

$$\dim V^\perp = \dim \mathrm{Kern}(\beta_2) = n - \mathrm{Rang} B$$

und

$$\dim^\perp V = \dim \mathrm{Kern}(\beta_1) = n - \mathrm{Rang} B^t = n - \mathrm{Rang} B.$$

(b) Sei $\mathrm{Rang} B = m \Rightarrow \dim \mathrm{Bild}(\beta_1) = m$. Weil B ist bzgl. die Basis $v_1, \ldots, v_n$ geben können wir sicher $v_1^*, \ldots, v_m^*$ als Basis für $\mathrm{Bild}(\beta_1)$ wählen (an mindestens nach ein Permuation von Basiselementen). Also folgt

$$\beta_1 v_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} v_j^*.$$

Sei $x=\sum_{i=1}^{n}x_iv_i$ und $y=\sum_{i=1}^{n}y_iv_i$ wegen das linearitet von β_1 haben wir

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &= \beta_1 x(y)\\ &= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ij}x_i\right)v_j^*\left(\sum_{k=1}^{n}y_kv_k\right)\\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}b_{ij}x_iy_j=\sum_{j=1}^{m}y_j\sum_{i=1}^{n}b_{ij}x_i\\ &= \sum_{j=1}^{m}f_j(x)g_j(y)\end{aligned}$$

wobei $f_j(x)=\sum_{i=1}^{n}b_{ij}x_i$ und $g_j(y)=y_j=v_j^*(y)$. Dann ist $\text{Rang}(f_1,\ldots,f_m)=\text{Rang}B=m$ und v_j^* sind alle linear unabh. also ist auch $\text{Rang}(g_1,\ldots,g_m)=m$.
Umgekehrt: Sei $\beta(x,y)=\sum f_j(x)g_j(y)$ mit $\text{Rang}(f_1,\ldots,f_m)=\text{Rang}(g_1,\ldots,g_m)=m$. Dann ist $\beta(v_i,v_k)=\sum_{j=1}^{m}f_j(v_i)g_j(v_k)=b_{ik}$. Das Kern von B is durch $B\vec{x}=0$ definiert. Also wenn $\vec{x}\in\text{Kern}(B)$ dann folgt $\sum_{k=1}^{n}b_{ik}x_k=0,\forall i\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f_j(v_i)g_j(v_k)x_k=0,\forall i,\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{m}f_j(v_i)\left(\sum_{k=1}^{n}g_j(v_k)x_k\right)=0\,\forall i$ und weil $\text{Rang}(f_1,\ldots,f_m)=m$ ist $\text{Kern}\left(f_j(v_i)\right)=\{0\}$ so $\sum_{k=1}^{n}g_j(v_k)x_k=0$ aber $\text{Rang}\left(g_j\right)=m$ also hat die Lösungsmenge diesen Gleichung dimension $n-m$. D.h. $\dim\text{Kern}B=n-m$ also ist $\text{Rang}B=m$.

(H 25)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper mit $Char(\mathbb{K})\neq 2$ und V ein n-dimensionales Vektorraum über $\mathbb{K}$. Sei $\beta:V\times V\to\mathbb{K}$ ein nicht ausgeartetet Bilinearform auf V. Zeigen Sie, daß β schiefsymmetrisch ist (d.h. $\beta(x,y)=-\beta(y,x)\ \forall x,y\in V$) genau wenn es symplektisch ist (d.h. $\beta(x,x)=0\ \forall x\in V$).

LÖSUNG: S

ei B die Strukturmatrix von β bzgl. eine Basis $v_1,\ldots,v_n$ von V.

Sei β schiefsymmetrisch, d.h. $\beta(x,y)=-\beta(y,x)$ für jede $x,y\in V$. Mit $x=y$ folgt dann $\beta(x,x)=-\beta(x,x)$, d..h β ist symplektisch.

Sei β symplektisch. Wie wissen dann daß

$$\begin{aligned}0=\beta\left(v_i+v_j,v_i+v_j\right) &= \beta(v_i,v_i)+\beta\left(v_j,v_j\right)+\beta\left(v_i,v_j\right)+\beta\left(v_j,v_i\right)\\ &= 0+0+\beta\left(v_i,v_j\right)+\beta\left(v_j,v_i\right)\end{aligned}$$

also ist $\beta\left(v_i,v_j\right)=-\beta\left(v_j,v_i\right)$ so β ist schiefsymmetrisch.