Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Erik Hofmann
Frederik Strmberg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008 9.10.2007

Lineare Algebra II

1. Übung

Gruppenübungen

(G 1) Summen von Untervektorräumen

Es sei V ein Vektorraum ber dem Körper $\mathbb{K}$ (z.B: $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) mit Untervektorräumen $W_i \subset V$, $i \in I$ ($I \neq \emptyset$). Die *Summe* der Untervektorräume W_i ist die Menge

$$\Sigma_{i \in I} W_i := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \mathbf{w}_k \mid \mathbf{w}_k \in \bigcup W_i \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

aller endlichen Summen von Vektoren aus den Untervektorräumen W_i. Beweisen Sie, daß $\sum W_i$ auch wieder ein Untervektorraum von V ist.

(G 2) Erzeugte Untervektorräume

Es sei V ein Vektorraum ber dem Körper $\mathbb{K}$ (z.B: $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) und $M \subset V$ eine Teilmenge von V. Die Menge $S = \{W \leq V \mid M \subset W\}$ aller Untervektorräume, welche M enthalten, ist durch die Inklusion $\leq$ ("ist Unervektorraum von") geordnet.

(a) Zeigen Sie, daß jede Teilmenge in S ein Infimum hat, d.h. daß es zu jeder Teilmenge $\{W_i\}_{i \in I} \subset S$ einen grösten Vektorraum W gibt, der kleiner als alle W_i ist.

(b) Beweisen sie, daß es einen kleinsten Untervektorraum $W \leq V$ gibt, welcher die Menge M enthalt. Dieser Untervekrorraum wird der *von M erzeugte Untervektorraum* genannt und auch mit $\langle M \rangle$ bezeichnet.

(c) Es seien W_i, $i \in I$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie $\langle \bigcup W_i \rangle = \sum W_i$.

(d) Nach Teilaufgabe c) kann man die Summe von Untervektorräumen auch durch $\sum W_i := \langle \bigcup W_i \rangle$ *definieren*. Hierbei kann man die Vorrasussetzung $I \neq \emptyset$ weglassen. Was ist der von der leeren Menge $\emptyset$ erzeugte Untervektorraum $\langle \emptyset \rangle \leq V$?

(G 3) Direkte Summen

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ (z.B: $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) mit Untervektorräumen $W_i \subset V$, $i \in I$. Die *Summe* der Untervektorräume W_i heißt *direkt*, geschrieben $\bigoplus W_i$, falls für alle $n \geq 1$ die Gleichung $\mathbf{0} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{w}_k$ mit $\mathbf{w}_k \in W_{i_k}$ und $W_{i_k} \cap W_{i_l} = \mathbf{0}$ für $k \neq l$ nur die triviale Lösung $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n = \mathbf{0}$ besitzt. Wir nehmen an, daß die Summe $\bigoplus_{i \in I} W_i$ direkt ist.

(a) Zeigen Sie, daß sich jeder Vektor $\mathbf{w} \in \bigoplus W_i$ einer direkten summe eindeutig als Summe von Vektoren aus verschiedenen Untervektorräumen W_i schreiben läßt.

(b) Beweisen Sie, daß sich für disjunkte Teilmengen $J, J' \subset I$ die direkten Summen $\bigoplus_{j \in J} W_j$ und $\bigoplus_{j' \in J'} W_{j'}$ trivial schneiden.

(G 4) Summen und direkte Summen

Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und in diesem den linearen Teilraum U, der durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \quad \text{and} \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

für $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ definiert wird. Weiter sei W der lineare Teilraum von $\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

aufgespannt wird.

(a) Bestimmen Sie eine Basis für den linearen Teilraum $U \cap W$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis für den linearen Teilraum $U + W$.

(c) Ist $U + W$ die direkte Summe von U und W?

(G 5) Direkte Summen/Eigenräume

Es sei $A : V \to V$ ein Endomorphismus des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.

(a) Beweisen Sie, daß die Summe $\Sigma V_\lambda(A)$ der Eigenräume $V_\lambda(A) := \ker(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - A)$ zu den verschiedenen Eigenwerten λ direkt ist.

(b) Zeigen Sie, daß $V = \bigoplus V_\lambda(A)$ gilt, falls die Abbildung A diagonalisierbar ist.

(G 6) Skalarprodukte

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$. Beweisen Sie, daß für jeden Untervektoraum $W \leq V$ die Gleichung $W^{\perp\perp} = W$ erfüllt ist.

Hausübungen

(H 1) 10 Punkte

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie daß aus $\langle u, u \rangle = 0$ für alle $u \in V$ schon $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $u, v \in V$ folgt.

(H 2) 10 Punkte

Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit positiv definiter hermitescher Form $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$. Weiterhin sei $A : V \to V$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit adjungierter Abbildung A^* (,d.h. es gilt $\langle A(v), w \rangle = \langle v, A^*(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$). Beweisen Sie $\mathrm{Ker}\ A = (\mathrm{Im}\ A^*)^\perp$ und $\mathrm{Im}\ A = (\mathrm{Ker}\ A^*)^\perp$.

(H 3) 10 Punkte

Es sei $V \subset \mathbb{R}^3$ der von den Vektoren $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 2)$ erzeugte Unterraum. Finden Sie ein ON-Basis für V bezüglich der Bilinearform

$$< \vec{x}, \vec{y} >= x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3.$$