Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J.H. Bruinier
Martin Fuchssteiner
Erik Hofmann
Frederik Strmberg

Lineare Algebra II

1. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Es sei V ein Vektorraum ber dem Körper $\mathbb{K}$ (z.B: $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) mit Untervektorräumen $W_i \subset V$, $i \in I$ ($I \neq \emptyset$). Die *Summe* der Untervektorräume W_i ist die Menge

$$\Sigma_{i\in I} W_i := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \mathbf{w}_k \mid \mathbf{w}_k \in \bigcup W_i \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

aller endlichen Summen von Vektoren aus den Untervektorräumen W_i. Beweisen Sie, daß $\sum W_i$ auch wieder ein Untervektorraum von V ist.

LÖSUNG:

Es ist zu beweisen, daß ΣW_i das neutrale element $\mathbf{0}$ enthält, unter der Adddition in V abgeschlossen ist (.d.h. $\Sigma W_i + \Sigma W_i \subset \Sigma W_i$) und zu jedem Vektor $\mathbf{w} \in \Sigma W_i$ auch das Inverse $-\mathbf{w}$ enthält.

Ad 1 Es gilt $\mathbf{0} \in W_i$ für alle $i \in I$. Somit ist $\mathbf{0}$ eine endliche Summe von Vektoren aus den Untervektorräumen W_i.

Ad 2 Die Addition endlicher Summen von Vektoren aus den Untervektorräumen W_i ergibt wieder eine endliche Summe von Vektoren aus den Untervektorräumen W_i. Somit gilt $\Sigma W_i + \Sigma W_i \subset \Sigma W_i$.

Ad 3 Ist $\mathbf{w} = \sum_k \mathbf{w}_k$ ein Vektor aus $\sum W_i$, so ist das Inverse $-\mathbf{w} = \sum_k(-\mathbf{w}_k)$ auch eine endliche Summe von Vektoren aus den Untervektorräumen W_i und liegt somit in ΣW_i.

(G 2)

Es sei V ein Vektorraum ber dem Körper $\mathbb{K}$ (z.B: $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) und $M \subset V$ eine Teilmenge von V. Die Menge $S = \{W \leq V \mid M \subset W\}$ aller Untervektorräume, welche M enthalten, ist durch die Inklusion $\leq$ ("ist Unervektorraum von") geordnet.

(a) Zeigen Sie, daß jede Teilmenge in S ein Infimum hat, d.h. daß es zu jeder Teilmenge $\{W_i\}_{i\in I} \subset S$ einen grösten Vektorraum W gibt, der kleiner als alle W_i ist.

(b) Beweisen sie, daß es einen kleinsten Untervektorraum $W \leq V$ gibt, welcher die Menge M enthalt. Dieser Untervekrorraum wird der *von M erzeugte Untervektorraum* genannt und auch mit $\langle M \rangle$ bezeichnet.

(c) Es seien W_i, $i \in I$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie $\langle \bigcup W_i \rangle = \sum W_i$.

(d) Nach Teilaufgabe c) kann man die Summe von Untervektorräumen auch durch $\sum W_i := \langle \bigcup W_i \rangle$ *definieren*. Hierbei kann man die Vorrasussetzung $I \neq \emptyset$ weglassen. Was ist der von der leeren Menge $\emptyset$ erzeugte Untervektorraum $\langle \emptyset \rangle \leq V$?

LÖSUNG:

(a) Jeder Untervektorraum W, welcher in allen W_i enthalten ist, liegt auch im Schnitt $W = \cap W_i$. Dieser Schitt $W = \cap W_i$ ist somit das Infimum der Familie W_i.

(b) Der Schnitt aller $W = \bigcap_{W' \in S} W'$ ist der kleinste Untervektorraum von V, welcher in S liegt, d.h. der kleinste, welcher die Menge M enthält.

(c) Die Summe $\sum W_i$ enthält die UntervektorrÄume W_i und ist nach Aufgabe T1 selbst ein Untervektorraum von V. Wir zeigen, daß $\sum W_i$ schon der kleinste solche Untervektorraum ist. Jeder Untervektorraum W von V, welcher alle W_i enthält, enthält auch alle Linearkonbinationen von Vektoren aus den W_i (, weil es ein Untervektorraum ist). Dies gilt auch für den von $\bigcup W_i$ erzeugten Untervektorraum $\langle \bigcup W_i \rangle = \sum W_i$. Somit gilt, $\sum W_i \leq \langle \bigcup W_i \rangle$. Weil $\langle \bigcup W_i \rangle = \sum W_i$ jedoch der kleinste Untervektorraum ist, welcher die Menge $\bigcup W_i \rangle$ enthält, kann nicht $\sum W_i < \langle \bigcup W_i \rangle$ gelten. Es folgt $\sum W_i = \langle \bigcup W_i \rangle$.

(d) Nach Definition is $\langle \emptyset \rangle$ der kleinste Untervektorraum, welcher die leere Menge $\emptyset$ enthält. Dies ist der triviale Untervektorraum $\mathbf{0}$.

(G 3)

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ (z.B: $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) mit Untervektorräumen $W_i \subset V$, $i \in I$. Die *Summe* der Untervektorräume W_i heißt *direkt*, geschrieben $\bigoplus W_i$, falls für alle $n \geq 1$ die Gleichung $\mathbf{0} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{w}_k$ mit $\mathbf{w}_k \in W_{i_k}$ und $W_{i_k} \cap W_{i_l} = \mathbf{0}$ für $k \neq l$ nur die triviale Lösung $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n = \mathbf{0}$ besitzt. Wir nehmen an, daß die Summe $\bigoplus_{i \in I} W_i$ direkt ist.

(a) Zeigen Sie, daß sich jeder Vektor $\mathbf{w} \in \bigoplus W_i$ einer direkten summe eindeutig als Summe von Vektoren aus verschiedenen Untervektorräumen W_i schreiben läßt.

(b) Beweisen Sie, daß sich für disjunkte Teilmengen $J, J' \subset I$ die direkten Summen $\bigoplus_{j \in J} W_j$ und $\bigoplus_{j' \in J'} W_{j'}$ trivial schneiden.

LÖSUNG:

(a) Nach Definition der Summe ΣW_i läßt sich jeder Vektor $\mathbf{w} \in \bigoplus W_i$ als Summe von Vektoren aus den Untervektorräumen W_i schreiben. Es bleibt zu zeigen, daß diese Darstellung eindeutig ist. Angenommen es seien

$$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{w}_k \quad \textit{und} \quad \mathbf{w} = \sum_{l=1}^{m} \mathbf{w'}_l$$

zwei verschiedene Darstellungen eines Vektors $\mathbf{w} \in \bigoplus W_i$ mit $\mathbf{w}_k \in W_{i_k}$, $\mathbf{w'}_l \in W_{i_l}$ und $W_{i_k} \neq W_{i_{k'}}$ für $k \neq k'$ bzw $W_{i_l} \neq W_{i_{l'}}$ für $l \neq l'$. Wir können o.B.d.A. $m = n$ und annehmen (indem wir in überflüssigen Summanden $\mathbf{w}_k = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{w'}_l = \mathbf{0}$ setzen). Somit erhalten wir eine Gleichung der Form

$$\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{w}_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{w'}_k.$$

Durch subtraktion der beiden Summen erhält man die Gleichung

$$\mathbf{0} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{w}_k - \mathbf{w'}_k).$$

Da eine solche Gleichung nach Annahme nur die triviale Lösung besitzt, folgt $\mathbf{w}_k = \mathbf{w'}_k$ für alle $1 \leq k \leq n$. Somit waren die beiden Darstellungen schon gleich.

(b) Würden sich für disjunkte Teilmengen $J, J' \subset I$ die direkten Summen $\bigoplus_{j \in J} W_j$ und $\bigoplus_{j' \in J'} W_{j'}$ nicht trivial schneiden, so gäbe es einen Vektor

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \in \left(\bigoplus_{j \in J} W_j \right) \cap \left(\bigoplus_{j' \in J'} W_{j'} \right).$$

Dieser Vektor $\mathbf{w}$ wäre somit eine Summe $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{w}_k$ mit $\mathbf{w}_k \in W_{j_k}$, $j_k \in J$ und gleichzeitig eine Summe $\mathbf{w} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{w'}_l$ mit $\mathbf{w'}_k \in W_{j'_k}$, $j'_k \in J'$. In beiden Summen sind nicht alle Summanden der Nullvektor (sonst gälte $\mathbf{w} = \mathbf{0}$). Wir können o.B.d.A. $m = n$ und annehmen (indem wir in überflüssigen Summanden $\mathbf{w}_k = 0$ oder $\mathbf{w'}_l = 0$ setzen). Durch Subtraktion erhielte eine nicht triviale Lösung der Gleichung $\mathbf{0} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{w}_k$ mit $\mathbf{w}_k \in W_{i_k}$ und $W_{i_k} \cap W_{i_l} = \mathbf{0}$ für $k \neq l$ im Widerspruch zu Annahme, daß die Summen direkt sind.

(G 4)

Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und in diesem den linearen Teilraum U, der durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \quad \text{and} \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

für $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ definiert wird. Weiter sei W der lineare Teilraum von $\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

aufgespannt wird.

(a) Bestimmen Sie eine Basis für den linearen Teilraum $U \cap W$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis für den linearen Teilraum $U + W$.

(c) Ist $U + W$ die direkte Summe von U und W?

LÖSUNG:

(a) Wir parametrisieren W folgendermaßen:

$$x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2r \\ 2s + r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun setzen wir $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ in die definierenden Gleichungen für U ein und erhalten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} s + 2r + r + 2s &= 0, \\ s + 2r + r + 2s &= 0, \end{aligned}$$

welche $s = -r$ liefern. Deshalb besteht $U \cap W$ aus allen Vektoren der Form

$$x = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

für $s \in \mathbb{R}$, und hat als Basis etwa den Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Um eine Basis für $U+W$ zu bestimmen, bringen wir das definierende Gleichungssystem auf Stufenform und erhalten

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0, \\ & & -2x_3 & -2x_4 & = 0. \end{array}$$

Nun setzen wir die Nicht-Pivotvariablen x_2 und x_4 jeweils 1 und erhalten damit, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von U bilden. Schließlich schreiben diese Vektoren, sowie diejenigen, die W aufspannen, als Zeilen untereinander, führen den Gauss-Jordan-Algorithmus durch

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

und erhalten, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $U + V$ bilden.

(c) Da $U \cap W \neq \{0\}$ gilt, ist $U + W$ nicht die direkte Summe von U und W.

(G 5) Direkte Summen/Eigenräume

Es sei $A : V \to V$ ein Endomorphismus des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.

(a) Beweisen Sie, daß die Summe $\Sigma V_\lambda(A)$ der Eigenräume $V_\lambda(A) := \ker(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - A)$ zu den verschiedenen Eigenwerten λ direkt ist.

(b) Zeigen Sie, daß $V = \bigoplus V_\lambda(A)$ gilt, falls die Abbildung A diagonalisierbar ist.

LÖSUNG:

(a) Die Summe ist genau dann nicht direkt, wenn der Nullvektor eine nichttriviale Summe von Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten ist:

$$0 = v_1 + \ldots + v_n$$

Wir beweisen die Unmöglichkeit dieser Darstellung durch Induktion über n. Der Fall $n = 2$ ist bekannt, die Summe von zwei Eigenräumen zu verschiedenen Eigenwerten ist immer direkt. Wir nehmen nun an, die direkte Summe aus n Eigenräumen zu verschiedenen Eigenwerten sei immer direkt und es gäbe $n+1$ Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_{n+1}$ zu n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ mit

$$v_1 + \ldots + v_{n+1} = 0.$$

Durch Anwenden der Linearen Abbildung A erhält man die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n+1} v_n = 0.$$

Zieht man von dieser Gleichung das λ_{n+1}-fache der 1. Gleichung ab, so ergibt sich die Gleichung

$$(\lambda_1 \lambda_{n+1}) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \lambda_{n+1}) v_n = 0.$$

Nach Induktionsvorraussetzung ist müssen die Summanden $V_1, \ldots, v_n$ verschwinden, es folgt somit auch $v_{n+1} = 0$. Somit ist die Summe aus $n+1$ Eigenräumen zu verschiedenen Eigenwerten auch immer direkt.

(b) Weil die Abbildung A nach Vorraussetzung diagonalisierbar ist, gibt es eine Basis aus Eigenvektoren, daher ist die Summe $\oplus_\lambda V_\lambda(A)$ der ganze Vektorraum V.

(G 6)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$. Beweisen Sie, daß für jeden Untervektoraum $W \leq V$ die Gleichung $W^{\perp\perp} = W$ erfüllt ist.

Hausübungen

(H 1) 10 Punkte

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie daß aus $\langle u, u \rangle = 0$ für alle $u \in V$ schon $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $u, v \in V$ folgt.

LÖSUNG:

Lassen Sie $u, v \in V$. Dann gilt

$$\langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u+v \rangle + \langle v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle \, .$$

Also gilt $\langle u, v \rangle = \langle u+v, u+v \rangle - \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle = 0$.

(H 2) 10 Punkte

Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit positiv definiter hermitescher Form $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$. Weiterhin sei $A : V \to V$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit adjungierter Abbildung A^* (,d.h. es gilt $\langle A(v), w \rangle = \langle v, A^*(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$). Beweisen Sie Ker $A = (\text{Im } A^*)^\perp$ und Im $A = (\text{Ker } A^*)^\perp$.

Lösung:

Nach Vorraussetzung gilt $\langle A(v), w \rangle = \langle v, A^*(w) \rangle$ für alle $v, w \in V$. Somit folgt

$$\begin{aligned} v \in \text{Ker } A &\Leftrightarrow \forall w \in V : \langle A(v), w \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall w \in V : \langle v, A^*(w) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow v \in (\text{Im } A^*)^\perp. \end{aligned}$$

Mit dieser Gleichheit erhält man

$$\begin{aligned} \text{Im } A &= \text{Im } (A^*)^* \\ &= \left[(\text{Im } (A^*)^*)^\perp \right]^\perp \\ &= [\text{Ker } (A^*)]^\perp \, . \end{aligned}$$

(H 3) 10 Punkte

Es sei $V \subset \mathbb{R}^3$ der von den Vektoren $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, 2)$ erzeugte Unterraum. Finden Sie ein ON-Basis für V bezüglich der Bilinearform

$$< \vec{x}, \vec{y} >= x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

Lösung:

Wir benutzen die Gram-Schmid verfaren. Erst berechne $||A||^2 =^A A = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$. Dann setzen wir $e_1 = A$. Wir müssen dann berechnen die orthogonale projektion von B auf $e_1^\perp$. D.h. $B' = B -^{B, e_1} e_1 = B - (1 - 1 - 2)A = B + 2A = (1, -1, 2) + 2(1, 1, 1) = (3, 1, 4)$. Die "länge" von B' ist $||B||^2 = 1 - 1 - 4 = -4$ und wir setzen $e_2 = \frac{-1}{4} B' = (-\frac{3}{4}, -\frac{1,4}{,} - 1)$. Man kann (soll) jetz verifizeren:

$${}^{e_1}e_2 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} + 1 = 0.$$

und $||e_1|| = ||e_2|| = 1$. Also, e_1, e_2 ist ein ONB für die Raum generiert von A und B.