Zermelo-Fraenkel Axiome für die Mengenlehre

mit Fundiertheit und Auswahlaxiom

Extensionalität

(EXT) $\forall x \forall y \big(\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y\big)$

Mengen sind durch die Gesamtheit ihrer Elemente eindeutig bestimmt; konstitutiv für Konzept “Menge”

Komprehension (Schema, für jede Formel $\varphi(\mathbf{x}, z) \in \mathrm{FO}(\in)$)

(SEP) $\forall \mathbf{x} \forall x \exists y \forall z \big(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(\mathbf{x}, z))\big)$

Definition von Teilmengen $\{z \in x \colon \varphi\} \subseteq x$, nur innerhalb gegebener Mengen (!) zur Vermeidung von Widersprüchen wie Russellsche Antinomie

Paarmengen

(PAIR) $\forall x \forall y \exists u \forall z \big(z \in u \leftrightarrow (z = x \vee z = y)\big)$

Existenz von $\{x, y\}$ zu gegebenen x, y

(große) Vereinigung

(UNION) $\forall x \exists y \forall z \big(z \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge z \in u)\big)$

Existenz der Vereinigung aller Mengen in x, zu gegebenem x: $\bigcup x = \bigcup\limits_{u \in x} u$; damit ist $x \cup y = \bigcup\{x, y\}$

Potenzmenge

(POWER) $\forall x \exists y \forall z \big(z \in y \leftrightarrow \forall u (u \in z \to u \in x)\big)$

Existenz der Potenzmenge $P(x) = \{y \colon y \subseteq x\}$ zu gegebenem x

Unendlichkeit

(INF) $\exists x \big(\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \to y \cup \{y\} \in x)\big)$

Existenz einer (unendlichen) “induktiven Menge”; garantiert die Existenz der Menge der natürlichen Zahlen (als kleinste induktive Menge)

Ersetzung (Schema, für jede Formel $\varphi(\mathbf{x}, u, v) \in \mathrm{FO}(\in)$)

(REP) $\forall \mathbf{x} \forall x \left[\begin{array}{l} \forall u \big(u \in x \to \exists^{=1} v \varphi(\mathbf{x}, u, v)\big) \\ \to \exists y \big(\forall v (v \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge \varphi(\mathbf{x}, u, v)))\big) \end{array} \right]$

Existenz der Bild*menge* einer gegebenen Menge x unter der durch $\varphi(\mathbf{x}, \cdot, \cdot)$ definierten Mengenoperation

Fundiertheit

(FOUND) $\forall x \big(\neg\, x = \emptyset \to \exists y \big(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset\big)\big)$

verbietet unendlich absteigende Folgen (und damit auch Zykel) in der $\in$-Beziehung

Auswahlaxiom

(AC) $\forall x \left[\begin{array}{l} \big(\neg\, \emptyset \in x \wedge (\forall u \forall v (u \in x \wedge v \in x \wedge \neg u = v) \to u \cap v = \emptyset)\big) \\ \to \exists y \forall u \big(u \in x \to \exists z\; y \cap u = \{z\}\big) \end{array} \right]$

Existenz einer Auswahlmenge zu jeder Menge (Familie) disjunkter nicht-leerer Mengen: genau ein Element aus jeder der beteiligten Mengen

In den FO-Formeln der Axiomenschemata steht $\mathbf{x}$ für ein Tupel freier Variablen.
$\exists^{=1} x \varphi$ ist kurz für die FO-Umschreibung von ”es gibt genau ein x”: $\exists x (\varphi \wedge \forall y (\varphi\frac{y}{x} \to x = y))$.
“Inoffizielle” Terme und Relationen wie $\emptyset, u \cap v, u \cup v, \{z\}, u \subseteq u$ stehen als Abkürzungen, die mithilfe vereinbarter Definitionen (in $\mathrm{FO}(\in)$) eliminiert werden können.