Sequenzenkalkül $\mathcal{K}$ für FO mit $=, \neg, \vee, \exists$

$$\text{(V)}\ \frac{}{\varphi;\varphi} \qquad \text{(A)}\ \frac{\Gamma;\varphi}{\Gamma,\Gamma';\varphi}$$

AL Regeln

$$(\vee\text{A})\ \frac{\Gamma,\varphi_1;\varphi \qquad \Gamma,\varphi_2;\varphi}{\Gamma,(\varphi_1\vee\varphi_2);\varphi} \qquad (\vee\text{S})\ \frac{\Gamma;\varphi_i}{\Gamma;(\varphi_1\vee\varphi_2)} \quad (i=1,2)$$

$$\text{(FU)}\ \frac{\Gamma,\psi;\varphi \qquad \Gamma,\neg\psi;\varphi}{\Gamma;\varphi} \qquad \text{(W)}\ \frac{\Gamma,\neg\varphi;\psi \qquad \Gamma,\neg\varphi;\neg\psi}{\Gamma;\varphi}$$

Quantorenregeln

$$(\exists\text{A})\ \frac{\Gamma,\varphi(y/x);\psi}{\Gamma,\exists x\varphi;\psi}\ (*) \qquad (\exists\text{S})\ \frac{\Gamma;\varphi(t/x)}{\Gamma;\exists x\varphi}$$

$$y \notin \text{frei}(\Gamma,\exists x\varphi,\psi)$$

$(*)$ die Nebenbedingung an die Variable y ist wesentlich für Korrektheit der Regel!

Gleichheitsregeln

$$(=)\ \frac{}{\Gamma;t=t} \qquad \text{(Subst)}\ \frac{\Gamma;\varphi(t/x)}{\Gamma,t=t';\varphi(t'/x)}$$

Sequenzen: $\Gamma;\varphi$ mit Antezedens $\Gamma \subseteq$ FO (endliche, auch leer) und Sukzedens $\varphi \in FO$

Allgemeingültigkeit: $\Gamma;\varphi$ allgemeingültig falls $\bigwedge\Gamma \models \varphi$

Korrektheit: nur allgemeingültige Sequenzen sind ableitbar, ergibt sich induktiv aus Korrektheit der Regeln (d.h., daraus, dass die Regeln, angewandt auf allgemeingültige Sequenzen stets wieder allgemeingültige Sequenzen produzieren)

Ableitbarkeit: $\Phi \vdash \varphi$ falls eine Sequenz $\Gamma;\varphi$ in $\mathcal{K}$ ableitbar ist mit $\Gamma \subseteq \Phi$

Widerspruchsfreiheit: Φ widerspruchsfrei, falls sich kein Widerspruch aus Φ ableiten lässt: für kein φ gilt $\Phi \vdash \varphi$ und $\Phi \vdash \neg\varphi$

Vollständigkeit: (starke Form) wenn $\Phi \models \varphi$, so auch $\Phi \vdash \varphi$;
äquivalent: jede widerspruchsfreie Formelmenge ist erfüllbar

Substitution: $\varphi(t/x)$ (in den Quantoren-m und Gleichheitsregeln) steht für Einsetzung des Terms t für freie Vorkommen der Variablen x in φ (syntaktisch nicht trivial; so ergibt sich etwa für $\varphi(x) = \exists y\, fy{=}x$ und $t = fy$: $\varphi(y/x) \equiv \exists z\, fz{=}fy$ und nicht etwa $\exists y\, fy{=}fy$)