Mathematik II für ETiT, WI(ET), SpoInf

Steffen Roch

SS 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlen **1**
1.1 Die natürlichen Zahlen 1
1.2 Die reellen Zahlen 3
1.3 Die komplexen Zahlen 8

2 Folgen und Reihen reeller Zahlen **14**
2.1 Folgen und Grenzwerte 14
2.2 Konvergenzkriterien und Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ 18
2.3 Reihen 21
2.4 Absolut konvergente Reihen 23

3 Reelle Funktionen und Stetigkeit **27**
3.1 Mengen und Mengenoperationen 27
3.2 Abbildungen 29
3.3 Stetige Funktionen 31
3.4 Einige spezielle Funktionen 35
3.4.1 Polynome 35
3.4.2 Wurzelfunktionen 36
3.4.3 Trigonometrische Funktionen 37
3.4.4 Exponentialfunktion 41
3.5 Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen 43

4 Differentialrechnung **46**
4.1 Definition der Ableitung 46
4.2 Differentiationsregeln 48
4.3 Ableitungen spezieller Funktionen 50
4.3.1 Polynome und rationale Funktionen 50
4.3.2 Exponential-, Logarithmus- und Potenzfunktionen 51
4.3.3 Trigonometrische Funktionen 52
4.4 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen 53

4.4.1 Lokale Extrema 53
4.4.2 Der Mittelwertsatz 54
4.4.3 Konvexität und höhere Ableitungen 56
4.4.4 Der Satz von Taylor 58
4.5 Anwendungen auf die Untersuchung von Funktionsgraphen 61
4.6 Anwendung auf die Bestimmung von Grenzwerten 63

5 Integralrechnung **64**
5.1 Der Begriff des Riemann-Integrals 64
5.2 Einige Klassen Riemann-integrierbarer Funktionen 69
5.3 Eigenschaften des Riemannintegrals 70
5.4 Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung 72
5.5 Einige Integrationstechniken 76
5.6 Stammfunktionen rationaler Funktionen 81
5.7 Flächeninhalte 84
5.8 Uneigentliche Integrale 86

6 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ **91**
6.1 Vektoren und Geraden im $\mathbb{R}^2$ 91
6.2 Vektoren, Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ 97
6.3 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ 102

7 Lineare Räume **104**
7.1 Definition und Beispiele 104
7.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension 106

8 Lineare Abbildungen und Matrizen **109**
8.1 Lineare Abbildungen 109
8.2 Matrizen 112
8.3 Der Rang einer Matrix 116

9 Lineare Gleichungssysteme **118**
9.1 Lösbarkeit und Lösungsstruktur 118
9.2 Der Gaußsche Algorithmus 122

10 Determinanten **127**
10.1 Definition und Eigenschaften 127
10.2 Determinanten und invertierbare Matrizen 132

11 Eigenwerte und Eigenvektoren **136**
11.1 Definitionen und einfache Eigenschaften 136
11.2 Koordinatentransformationen 140
11.3 Diagonalähnliche Matrizen 142
11.4 Orthonormalbasen 143

11.5 Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen 146
11.6 Quadratische Gleichungen 149
11.7 Hauptachsentransformationen und Klassifikation der Kurven und Flächen 2. Ordnung 151

12 Folgen und Reihen von Funktionen **156**
12.1 Punktweise Konvergenz 156
12.2 Gleichmäßige Konvergenz 157
12.3 Potenzreihen 162
12.4 Fourierreihen 170

13 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher **178**
13.1 Mengen im $\mathbb{R}^n$ 178
13.2 Grenzwerte und Stetigkeit 179
13.3 Partielle Ableitungen 182
13.4 Differenzierbarkeit 185
13.5 Richtungsableitungen 190
13.6 Mittelwertsatz und Satz von Taylor 191
13.7 Lokale Extrema 194
13.8 Parameterabhängige Integrale 196
13.9 Implizite Funktionen und Umkehrabbildungen 199
13.10 Extrema unter Nebenbedingungen 202

14 Wegintegrale **207**
14.1 Wege im $\mathbb{R}^n$ 207
14.2 Wegintegrale 211

15 Integration im $\mathbb{R}^n$ **219**
15.1 Das Riemann-Integral über Intervallen im $\mathbb{R}^n$ 219
15.2 Integration über messbaren Mengen 224
15.3 Integration über Normalbereiche 229
15.4 Die Substitutionsregel 232

9 Lineare Gleichungssysteme

Eine der häufigsten mathematischen Aufgaben ist die Lösung linearer Gleichungssysteme. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns zunächst mit Lösbarkeitsbedingungen und mit der Struktur der Lösung, und anschließend lernen wir den Gaußschen Algorithmus zur praktischen Lösung linearer Gleichungssysteme kennen.

9.1 Lösbarkeit und Lösungsstruktur

Ein *lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen in n Unbekannten hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Dabei sind die a_{ij} und die b_i vorgegebene reelle oder komplexe Zahlen. Da alle Überlegungen in diesem Abschnitt unabhängig davon sind, ob wir im Reellen oder im Komplexen arbeiten, schreiben wir wieder $\mathbb{K}$ für einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Das System (9.1) zu lösen bedeutet, Zahlen $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ so zu finden, dass alle Gleichungen in (9.1) zugleich erfüllt sind.

Mit den Bezeichnungen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

können wir das System (9.1) auch kurz als

$$Ax = b \tag{9.2}$$

schreiben, wobei nun der Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ zu bestimmen ist. Die Matrix A heißt *Koeffizientenmatrix* von (9.2) bzw. (9.1). Die folgenden Beispiele zeigen, dass beim Lösen linearer Gleichungssysteme sehr unterschiedliche Situationen auftreten können.

Beispiele

a) Das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

ist nicht lösbar.

b) Das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

hat unendlich viele Lösungen, nämlich alle Vektoren der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

c) Das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung $x_1 = 0, x_2 = 1$ bzw. $x = (0, 1)^T$. ∎

Wir fragen uns nun, unter welchen Bedingungen das System (9.1) lösbar ist und wann seine Lösungen eindeutig bestimmt sind, und wir beginnen mit homogenen Systemen.

Definition 9.1 *Das lineare Gleichungssystem* (9.2) *heißt* homogen*, wenn* $b = 0$ *ist, andernfalls heißt* (9.2) inhomogen*. Das System* $Ax = 0$ *heißt das zu* (9.2) *gehörende* homogene Gleichungssystem.

Homogene Gleichungssysteme sind stets lösbar: eine Lösung ist der Nullvektor. Wenn wir die $m \times n$-Matrix A mit einer linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ identifizieren, so sind die Lösungen des Systems $Ax = 0$ genau die Vektoren, die im Kern dieser Abbildung liegen. Bezeichnen wir diese lineare Abbildung einfach mit A und schreiben wir L_h für die Menge aller Lösungen des homogenen Systems $Ax = 0$, so ist also

$$L_h = \operatorname{Ker} A.$$

Lemma 8.2 (b) und der Dimensionssatz liefern sofort das folgende Resultat.

Lemma 9.2 *Sei* A *eine* $m \times n$*-Matrix. Dann bildet die Lösungsmenge* L_h *der homogenen Gleichung* $Ax = 0$ *einen linearen Unterraum von* $\mathbb{K}^n$*, und die Dimension dieses Raumes ist gleich*

$$\dim L_h = \dim \operatorname{Ker} A = n - \operatorname{rang} A.$$

Im Falle $\operatorname{rang} A = n$ ist die Lösung von $Ax = 0$ also eindeutig bestimmt und gleich dem Nullvektor. Im Fall $\operatorname{rang} A < n$ findet man eine Basis $f_1, \ldots, f_l$ von L_h (mit $l = n - \operatorname{rang} A > 0$) und kann jede Lösung x der homogenen Gleichung in der Form

$$x = \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_l f_l, \quad \lambda_i \in \mathbb{K},$$

schreiben. Die Lösung hängt also von $l = n - \operatorname{rang} A$ frei wählbaren Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ ab.

Wir sehen uns nun inhomogene Systeme $Ax = b$ an und schreiben sie in der Form

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b \quad \text{mit} \quad a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}.$$

Das System $Ax = b$ lösen heißt also, den Vektor b als Linearkombination der Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n$ von A darzustellen. Fügt man zur Matrix A noch den Spaltenvektor b als $n+1$. Spalte hinzu, so erhält man die *erweiterte Matrix* $(A, b) \in \mathbb{K}^{m,n+1}$ des Systems (9.2), mit der wir das folgende Kriterium formulieren können.

Lemma 9.3 *Das lineare Gleichungssystem* (9.2) *ist genau dann lösbar, wenn*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} (A, b). \tag{9.3}$$

Wir nehmen nun an, dass die Bedingung (9.3) erfüllt ist. Sind x und $\hat{x}$ zwei Lösungen von (9.2), d.h. ist $Ax = b$ und $A\hat{x} = b$, so ist

$$A(x - \hat{x}) = Ax - A\hat{x} = 0;$$

der Vektor $y := x - \hat{x}$ löst also das homogene System $Ay = 0$. Ist umgekehrt y eine Lösung des homogenen Systems und $\hat{x}$ eine Lösung des inhomogenen Systems, so ist auch $x := \hat{x} + y$ eine Lösung des inhomogenen Systems:

$$Ax = A\hat{x} + Ay = b + 0 = b.$$

Lemma 9.4 *Das lineare Gleichungssystem* (9.2) *sei lösbar. Dann besteht die Lösungsmenge L_i dieses Systems aus allen Vektoren der Gestalt*

$$x = \hat{x} + y \quad \textit{mit} \quad y \in L_h = \operatorname{Ker} A, \tag{9.4}$$

wobei $\hat{x}$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist.

Formal kann man (9.4) schreiben als

$$L_i = \hat{x} + L_h.$$

Zur Lösung des inhomogenen Systems muß man also *eine spezielle Lösung* $\hat{x}$ der Gleichung $Ax = b$ sowie die *allgemeine Lösung* der zugehörigen homogenen Gleichung finden.

Aus den Lemmas 9.2 - 9.4 folgt außerdem sofort, dass die Gleichung $Ax = b$ genau dann *eindeutig lösbar* ist, wenn

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} (A, b) = n. \tag{9.5}$$

Sehen wir uns noch einmal die Beispiele vor Definition 9.1 an.

Beispiele

a) Hier ist

$$1 = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

also ist das System nicht lösbar.

b) Hier ist

$$1 = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1 < 2,$$

Also ist das System lösbar, und die Lösungen hängen von $2 - 1 = 1$ reellen Parameter ab.

c) Hier ist schließlich

$$2 = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

d.h. das System ist lösbar, und die Lösung ist eindeutig bestimmt. ■

Anmerkung Die in Lemma 9.4 festgestellte Struktur der Lösung trifft auf beliebige lineare Gleichungen $\varphi(x) = b$ mit einer linearen Abbildung $\varphi : U \to V$ zu. Wir kommen z.B. im Abschnitt über Differentialgleichungen darauf zurück.

Ist A eine $n \times n$-Matrix (d.h. quadratisch) und ist $\operatorname{rang} A = n (= m)$, so ist A invertierbar, und die (eindeutig bestimmte) Lösung von $Ax = b$ lautet

$$x = A^{-1} b. \tag{9.6}$$

Für die praktische Bestimmung der Lösung x ist (9.6) allerdings wenig geeignet, da die Ermittlung der inversen Matrix recht mühsam ist.

9.2 Der Gaußsche Algorithmus

Der Gaußsche Algorithmus oder das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems (9.1) bzw. (9.2) beruht auf der Beobachtung, dass sich die Lösungsmenge dieses Systems nicht ändert, wenn in der *erweiterten* Systemmatrix die folgenden *elementaren Zeilenoperatoren* durchgeführt werden:

(a) Addition einer Zeile zu einer anderen.
(b) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$.
(c) Vertauschen zweier Zeilen.

Außerdem wollen wir noch zulassen:

(d) Vertauschen zweier Spalten der Systemmatrix.

Letzteres entspricht einer Umbenennung der gesuchten Zahlen $x_1, \ldots, x_n$. Ziel ist es, durch diese Operationen eine „Dreiecks-“ oder wenigstens „Trapez-Gestalt“ der Systemmatrix zu erreichen, aus der man die Lösung durch „Rückwärtseinsetzen“ gewinnt. Sehen wir uns zunächst einige Beispiele an.

Beispiel 1 Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

hat die erweiterte Systemmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Subtraktion der ersten Zeile von der zweiten, dritten und vierten Zeile führt auf

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

d.h.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_4 & = & 1. \end{array}$$

Wir erhalten ein System von Dreiecksgestalt. Aus der letzten Gleichung folgt $x_4 = 1$. Wir setzen dies in die vorletzte Gleichung ein und erhalten $x_3 = 0$. In die

zweite Gleichung eingesetzt liefert dies $x_2 = 0$, und aus der ersten Gleichung folgt schließlich, dass auch $x_1 = 0$. Die Lösung des Systems ist also eindeutig bestimmt und lautet $(0, 0, 0, 1)^T$. ■

Beispiel 2 Das Gleichungssystem werde durch die erweiterte Systemmatrix

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \end{array}\right)$$

beschrieben. Austausch von erster und zweiter Zeile liefert

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \end{array}\right).$$

Addition des Doppelten der ersten Zeile zur letzten Zeile ergibt

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

und Division der zweiten Zeile durch 3 liefert schließlich

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{9.7}$$

bzw. das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Die letzte Zeile der Matrix (9.7) entspricht der Gleichung $0 = 0$, die wir natürlich weglassen. Zum Auflösen von (9.8) wählt man $x_3 = t$ als Parameter. Aus der letzten Gleichung von (9.8) folgt dann

$$x_2 + 2t = 1 \quad \text{bzw.} \quad x_2 = 1 - 2t,$$

und durch Einsetzen in die erste Zeile findet man

$$x_1 + 2(1 - 2t) + 3t = 1 \quad \text{bzw.} \quad x_1 = -1 + t.$$

Die Lösungsmenge des Systems besteht also aus allen Vektoren der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + t \\ 1 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hier erkennen wir die in Lemma 9.4 beschriebene Struktur: die Lösung des inhomogenen Systems setzt sich zusammen aus einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems, nämlich $(-1,1,0)^T$, und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems, nämlich allen Vielfachen von $(1,-2,1)^T$. ∎

Beispiel 3 Wir betrachten das System mit der erweiterten Systemmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{array}\right),$$

die sich von Beispiel 2 nur vom Eintrag in der rechten unteren Ecke unterscheidet. Die im Beispiel 2 durchgeführten Operationen führen nun auf

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Die letzte Gleichung des umgeformten Systems lautet also $0 = 3$. Dieser Widerspruch zeigt, dass das System keine Lösung besitzt. ∎

Wir kommen nun zum allgemeinen System (9.1) zurück. Durch die elementaren Operationen (a) - (d) kann man die erweiterte Systemmatrix dieses Systems stets in die folgende Gestalt bringen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc|c} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ & 1 & c_{23} & \dots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ & & 1 & \dots & c_{3r} & c_{3,r+1} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & 1 & c_{r,r+1} & \dots & c_{rn} & d_r \\ \hline & & & & & & & & d_{r+1} \\ & & 0 & & & & 0 & & \vdots \\ & & & & & & & & d_m \end{array}\right)_{m,n} . \tag{9.9}$$

Aus dieser Darstellung können wir alle gewünschten Informationen über das Gleichungssystem gewinnen:

(1) Das System ist genau dann lösbar, wenn

$$d_{r+1} = \ldots = d_m = 0. \tag{9.10}$$

(2) Der Rang der Systemmatrix ist gleich r.

(3) Ist die Bedingung (9.10) erfüllt, so können wir die Lösung des Systems wie folgt gewinnen: Wir wählen $n-r = n-\text{rang}\, A$ Parameter $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r} \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und setzen

$$x_{r+1} = t_1, \quad x_{r+2} = t_2, \ldots \quad x_n = t_{n-r}.$$

Die r-te Gleichung von (9.9) lautet dann

$$x_r + c_{r,r+1}t_1 + \ldots + c_{rn}t_{n-r} = d_r$$

bzw.

$$x_r = d_r - c_{r,r+1}t_1 - \ldots - c_{rn}t_{n-r}.$$

Wir setzen dies in die $r-1$-te Gleichung von (9.9) ein und erhalten eine Darstellung von x_{r-1} in Abhängigkeit von $t_1, \ldots, t_{n-r}$, usw.

Wir fahren so fort bis zur ersten Zeile und erhalten die Lösung in der Gestalt

$$\begin{array}{rcrcl}
x_1 &=& e_1 + f_{11}t_1 & + \ldots + & f_{1,n-r}t_{n-r}, \\
 & & \vdots & & \\
x_r &=& e_r + f_{r1}t_1 & + \ldots + & f_{r,n-r}t_{n-r}, \\
x_r &=& t_1 & & \\
 & & \vdots & & \\
x_n &=& & & t_{n-r}
\end{array}$$

mit gewissen Zahlen e_i und f_{ij} und Parametern $t_1, \ldots, t_{n-r}$. In Vektorschreibweise lautet die Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} f_{11} \\ \vdots \\ f_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + t_{n-r} \begin{pmatrix} f_{1,n-r} \\ \vdots \\ f_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{9.11}$$

in der wir wieder die Lösungsstruktur aus Lemma 9.4 erkennen.

Man kann sich das „Rückwärtseinsetzen“ sparen, wenn man (ähnlich wie bei der Rangberechnung angedeutet) durch weitere elementare Operationen aus (9.9) eine Matrix der Gestalt

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc|c}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \hat{c}_{1,r+1} & \ldots & \hat{c}_{1n} & \hat{d}_1 \\
 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \hat{c}_{2,r+1} & \ldots & \hat{c}_{2n} & \hat{d}_2 \\
 & & 1 & \ldots & 0 & \hat{c}_{3,r+1} & \ldots & \hat{c}_{3n} & \hat{d}_3 \\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & & & & 1 & \hat{c}_{r,r+1} & \ldots & \hat{c}_{rn} & \hat{d}_r \\
\hline
 & & & & & & & & \hat{d}_{r+1} \\
 & & 0 & & & & 0 & & \vdots \\
 & & & & & & & & \hat{d}_n
\end{array}\right)$$

erzeugt, aus der man im Falle $\hat{d}_{r+1} = \ldots = \hat{d}_n = 0$ sofort die Darstellung der Lösung in der Form (9.11) ablesen kann.

Wir sehen uns ein abschließendes Beispiel an.

Beispiel Die erweiterte Systemmatrix eines linearen Gleichungssystems sei

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & -2 & 14 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 10 \end{array}\right).$$

Durch elementare Operationen gelangen wir nacheinander zu den Matrizen

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/7 \end{array}\right),$$

wobei wir Nullenzeilen weglassen und im letzten Schnitt die dritte und vierte Spalte getauscht haben, wodurch x_3 und x_4 ihre Rollen tauschen. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} &x_4 = -3/7, \\ &x_2 + 2x_4 = -2, \quad \text{d.h.} \quad x_2 = -2 + 6/7 = -8/7, \\ &x_1 + 2x_2 - x_4 + x_3 = 2, \quad \text{d.h.} \quad x_1 = 2 + 16/7 - 3/7 - x_3. \end{aligned}$$

Mit dem Parameter $x_3 = t$ folgt schließlich

$$x_1 = 27/7 - t, \quad x_2 = -8/7, \quad x_3 = t, \quad x_4 = -3/7$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/7 \\ -8/7 \\ 0 \\ -3/7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

■

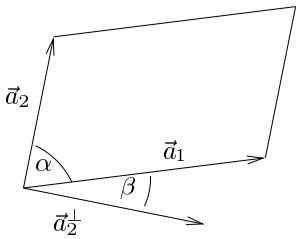
10 Determinanten

Man kann jeder quadratischen Matrix eine Zahl, die Determinante der Matrix, zuordnen, die wesentliche Informationen über die Matrix enthält.

10.1 Definition und Eigenschaften

Sei $A = (a_{ij})_{n,n}$ eine $n\times n$-Matrix mit reellen Einträgen. Im Fall $n = 1$ versteht man unter der Determinante von $A = (a_{11})$ einfach die Zahl a_{11}, und man schreibt $\det A = a_{11}$. Die Definition der Determinanten von 2×2- und 3×3-Matrizen motivieren wir geometrisch.

Dazu berechnen wir den Flächeninhalt des von den Spalten $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{21})^T$ und $\vec{a}_2 = (a_{12}, a_{22})^T$ von A aufgespannten Parallelogramms.



Der gesuchte Flächeninhalt ist gleich dem Betrag von $\|\vec{a}_1\|\,\|\vec{a}_2\|\,\sin\alpha$

(für $\alpha \in (0, 180°)$ ist diese Zahl bereits nichtnegativ). Sei $\vec{a}_2^{\perp} = (a_{22}, -a_{12})^T$ der auf $\vec{a}_2$ senkrecht stehende Vektor. Dann ist $\|\vec{a}_2\| = \|\vec{a}_2^{\perp}\|$ sowie $\alpha = 90° - \beta$, und daher gilt

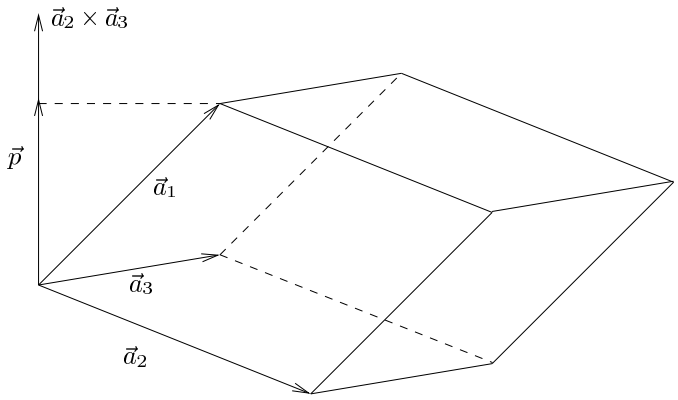
$$\begin{aligned} \|\vec{a}_1\| \cdot \|\vec{a}_2\| \sin\alpha &= \|\vec{a}_1\| \cdot \|\vec{a}_2^{\perp}\| \sin(90° - \beta) \\ &= \|\vec{a}_1\| \cdot \|\vec{a}_2^{\perp}\| \cos\beta = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2^{\perp}. \end{aligned}$$

Die Formel (6.3) für das Skalarprodukt ergibt schließlich $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2^{\perp} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Der gesuchte Flächeninhalt ist also gleich $|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}|$.

Definition 10.1 *Die Determinante der* 2×2*-Matrix* $A = (a_{ij})_{2,2}$ *ist die Zahl*

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{10.1}$$

Analog berechnen wir nun das Volumen des von den Spalten $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ der 3×3-Matrix $A = (a_{ij})_{3,3}$ aufgespannten Spats.



Dieses Volumen ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ aufgespannten Parallelogramms, multipliziert mit der Höhe des Spats. Dieser Flächeninhalt ist gleich $\|\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\|$, und die Höhe ist die Länge der Projektion $\vec{p}$ von $\vec{a}_1$ auf den Normaleneinheitsvektor des Parallelogramms, also gleich

$$\|\vec{p}\| = \left| \vec{a}_1 \cdot \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\|\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\|} \right|.$$

Das gesuchte Volumen ist daher gleich dem Betrag von $\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$. Diese Zahl bezeichnet man auch als *Spatprodukt* der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, und man schreibt

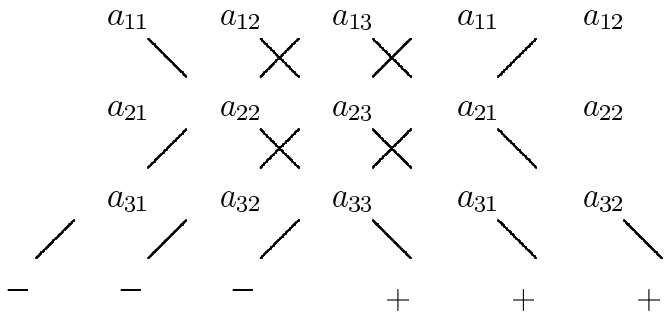
$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] := \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3).$$

Schreiben wir die Spaltenvektoren als $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})^T$, $a_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})^T$ and $\vec{a}_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$ und benutzen wir die Formel (6.3) sowie den Satz 6.10, so finden wir eine Möglichkeit der Berechnung des Spatprodukts dreier Vektoren mit Hilfe der Koordinaten der Vektoren:

$$\begin{aligned} [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] \;=\; & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Definition 10.2 *Die Determinante der* 3×3*-Matrix* $A = (a_{ij})_{3,3}$ *ist die Zahl auf der rechten Seite von* (10.2).

Als Merkhilfe dient die *Sarrussche Regel*, bei der man die ersten beiden Spalten noch einmal hinter die Matrix schreibt:



Für die Definition der Determinante einer $n\times n$-Matrix müssen wir die Formeln für 2×2- und 3×3-Determinanten verallgemeinern. Dazu benötigen wir einige

neue Begriffe. Jede Anordnung $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ der natürlichen Zahlen von 1 bis n heißt eine *Permutation* dieser Zahlen. Man kann sich leicht überlegen, dass es genau $n!$ verschiedene Permutationen der Zahlen von 1 bis n gibt. Eine Permutation heißt *gerade*, wenn sie durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen zweier Elemente aus der Ausgangspermutation $(1, 2, \ldots, n)$ hervorgeht, sonst *ungerade*. Schließlich definiert man das *Vorzeichen* $\operatorname{sgn}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ der Permutation als $+1$ oder -1, je nachdem, ob die Permutation gerade oder ungerade ist.

Definition 10.3 *Unter der Determinante der $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ versteht man die Zahl*

$$\det A = \sum_{(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)} \operatorname{sgn}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)\, a_{1\nu_1} a_{2\nu_2} \ldots a_{n\nu_n},$$

wobei die Summe über alle Permutationen der natürlichen Zahlen von 1 bis n genommen wird.

Man beachte, dass diese Definition natürlich auch für quadratische Matrizen mit komplexen Einträgen sinnvoll ist.

Beispiel Für $n = 3$ und $A = (a_{ij})_{3,3}$ haben wir $3! = 6$ Summanden:

$$\begin{array}{lllll}
(1,2,3) & \Rightarrow \text{ keine Vertauschung} & \Rightarrow \operatorname{sgn}(1,2,3) = 1 & \Rightarrow & +a_{11}a_{22}a_{33} \\
(1,3,2) & \Rightarrow \text{ eine Vertauschung} & \Rightarrow \operatorname{sgn}(1,3,2) = -1 & \Rightarrow & -a_{11}a_{23}a_{32} \\
(2,1,3) & \Rightarrow \text{ eine Vertauschung} & \Rightarrow \operatorname{sgn}(2,1,3) = -1 & \Rightarrow & -a_{12}a_{21}a_{33} \\
(3,2,1) & \Rightarrow \text{ eine Vertauschung} & \Rightarrow \operatorname{sgn}(3,2,1) = -1 & \Rightarrow & -a_{13}a_{22}a_{31} \\
(2,3,1) & \Rightarrow \text{ zwei Vertauschungen} & \Rightarrow \operatorname{sgn}(2,3,1) = 1 & \Rightarrow & +a_{12}a_{23}a_{31} \\
(3,1,2) & \Rightarrow \text{ zwei Vertauschungen} & \Rightarrow \operatorname{sgn}(3,1,2) = 1 & \Rightarrow & +a_{13}a_{21}a_{32}.
\end{array}$$

Die Summe der Zahlen in der rechten Spalte ist die Determinante von A. Diese stimmt natürlich mit der aus Definition 10.2 überein. ∎

Es folgen die wichtigsten Rechenregeln für Determinanten. Dazu führen wir eine kürzere Schreibweise für Matrizen ein. Sind $a_1, \ldots, a_n$ die Spalten einer Matrix A, so schreiben wir $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Satz 10.4 (a) *Die Determinante der $n \times n$-Einheitsmatrix I ist 1:*

$$\det I = \det(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1.$$

(b) *Die Determinante ist linear in jeder Spalte:*

$$\begin{aligned}
&\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, \lambda^{(1)} b_j^{(1)} + \lambda^{(2)} b_j^{(2)}, a_{j+1}, \ldots, a_n) = \\
&= \lambda^{(1)} \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, b_j^{(1)}, a_{j+1}, \ldots, a_n) + \\
&\quad + \lambda^{(2)} \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, b_j^{(2)}, a_{j+1}, \ldots, a_n).
\end{aligned}$$

(c) *Vertauscht man in A zwei Spalten, so ändert die Determinante ihr Vorzeichen:*

$$\det(\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots) = -\det(\ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots).$$

(d) *Die Determinante ändert sich nicht beim Transponieren:*

$$\det A = \det A^T.$$

(e) *Die Determinante ist multiplikativ: für beliebige $n \times n$-Matrizen A, B gilt*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Man beachte, dass wegen (d) die Eigenschaften (b) und (c) entsprechend auch für Zeilen gelten.

Die Berechnung von Determinanten mittels Definition 10.3 ist außerordentlich mühsam. Bereits für $n = 5$ hätte man 120 Produkte aus je 5 Faktoren zu berechnen und zu summieren. Die beiden folgenden Sätze bieten wesentlich praktikablere Möglichkeiten der Berechnung von Determinanten.

Satz 10.5 *Sei A eine $n \times n$-Matrix.*

(a) *Ist ein Spalten- oder Zeilenvektor von A der Nullvektor, so ist* $\det A = 0$.

(b) *Die Addition eines Vielfachen eines Spaltenvektors (Zeilenvektors) von A zu einem anderen Spaltenvektor (Zeilenvektor) von A läßt* $\det A$ *unverändert.*

(c) *Die Determinante einer Matrix von Dreiecksgestalt (d.h. alle Einträge oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen sind Null) ist gleich dem Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonalen.*

Man benutzt die Aussagen (b) und (c) aus Satz 10.4 sowie (b) aus Satz 10.5, um die Matrix A in Dreiecksgestalt zu bringen ohne ihre Determinante zu ändern. Dann kann die Determinante mit Satz 10.5 (c) bestimmt werden.

Beispiel 1

$$\det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&4&2\\0&3&0&-3\\1&1&2&6\end{pmatrix} = 2\cdot 3\det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\0&1&0&-1\\1&1&2&6\end{pmatrix}$$

$$= 6\cdot\det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\0&1&0&-1\\0&-1&-1&2\end{pmatrix} = 6\cdot\det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\0&0&-2&-2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

$$= 6\cdot(-2)\det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&1&3\end{pmatrix} = -12\det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&0&2\end{pmatrix},$$

und nach Satz 10.5 (c) ist gesuchte Determinante gleich $-12\cdot 2 = -24$. ∎

Determinanten können auch berechnet werden, indem man sie nach einer beliebigen Zeile oder Spalte *entwickelt*. Streicht man in der Matrix

$$A = \begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1k}&\dots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\dots&a_{ik}&\dots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\dots&a_{nk}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

die i-te Zeile und die k-te Spalte, so bleibt (nach „Zusammenschieben des Restes“) eine $(n-1)\times(n-1)$–Matrix übrig. Ihre Determinante heißt ein *Minor* von A und wird im Folgenden mit $\tilde{A}_{ik}$ bezeichnet. Jeder $n\times n$-Matrix hat offenbar genau n^2 Minoren.

Satz 10.6 (Entwicklungssatz) *Für jede $n\times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ und alle $i, k \in \{1,\dots,n\}$ gilt*

$$\det A = \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{i+\nu}a_{i\nu}\,\tilde{A}_{i\nu}$$

(Entwicklung nach der i-ten Zeile) sowie

$$\det A = \sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{k+\mu}a_{\mu k}\,\tilde{A}_{\mu k}$$

(Entwicklung nach der k-ten Spalte).

Die Minoren sind Determinanten; sie können also nach dem gleichen Prinzip berechnet werden. Besonders vorteilhaft ist die Entwicklung nach Zeilen oder Spalten, die viele Nullen enthalten. Man beachte die alternierenden Vorzeichen.

Beispiel 2 Entwicklung nach der letzten Spalte liefert

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} &= 3\det\begin{pmatrix}4&5\\7&8\end{pmatrix} - 6\det\begin{pmatrix}1&2\\7&8\end{pmatrix} + 9\det\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}\\ &= 3\cdot(-3) - 6(-6) + 9(-3) = 0.\end{aligned}$$

■

Beispiel 3 Entwicklung jeweils nach der ersten Spalte liefert

$$\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&0&a_{33}&a_{34}\\0&0&0&a_{44}\end{pmatrix} = a_{11}\det\begin{pmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{33}&a_{34}\\0&0&a_{44}\end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\det\begin{pmatrix}a_{33}&a_{34}\\0&a_{44}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\det(a_{44}) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

Auf diese Weise wird klar, dass die Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonalen ist (Satz 10.5(c)). ■

10.2 Determinanten und invertierbare Matrizen

Zur Erinnerung: Eine $n\times n$-Matrix heißt *invertierbar* (oder regulär), wenn es eine $n\times n$-Matrix A^{-1} gibt mit $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Äquivalent zur Invertierbarkeit von A ist jede der folgenden Bedingungen:

(a) Die lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto Ax$ ist bijektiv.

(b) $\ker A = \{0\}$.

(c) $\operatorname{rang} A = n$.

Wir charakterisieren nun die Invertierbarkeit von A in Abhängigkeit von der Determinanten von A. Sei zunächst A invertierbar. Anwendung von Satz 10.4(e) auf $A \cdot A^{-1} = I$ liefert

$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det I = 1.$$

Die Determinante einer invertierbaren Matrix ist also ungleich Null, und es gilt

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Wir zeigen, dass umgekehrt jede Matrix A mit $\det A \neq 0$ invertierbar ist und dass man die inverse Matrix von A explizit beschreiben kann. Dazu benötigen

wir einige Bezeichnungen. Für jeden Minor $\tilde{A}_{ik}$ $(i,k = 1,\ldots,n)$ von A definieren wir

$$A_{ik} := (-1)^{i+k}\tilde{A}_{ik}$$

(die A_{ik} heißen auch *Adjunkte* von A), und wir setzen

$$A_{\text{adj}} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}^T .$$

Lemma 10.7 *Für jede $n\times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ gilt*

$$A_{\text{adj}} \cdot A = A \cdot A_{\text{adj}} = \det A \cdot I. \tag{10.3}$$

Beweis Wir überlegen uns die Gleichheit $A \cdot A_{\text{adj}} = \det A \cdot I$. Dazu berechnen wir den ij-ten Eintrag von $A \cdot A_{\text{adj}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{ik}\tilde{A}_{jk} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & a_{j-1,3} & \ldots & a_{j-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots & a_{in} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & a_{j+1,3} & \ldots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Diese Matrix entsteht, indem die j-te Zeile der Matrix A durch die i-te Zeile von A ersetzt wird. Die Gleichheit (10.4) folgt nun aus dem Entwicklungssatz durch Entwickeln nach der j-ten Zeile.

Es bleibt noch die Aufgabe, die Determinante der Matrix in (10.4) zu berechnen. Das ist einfach: Für $i = j$ ist dies gerade die Determinante von A, und für $i \neq j$ enthält die Matrix in (10.4) zwei gleiche Zeilen, so dass ihre Determinante gleich Null ist. Es ist also

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} \det A & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j, \end{cases}$$

und das ist die Behauptung. ∎

Satz 10.8 *Eine $n\times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist. In diesem Fall gilt*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, A_{\text{adj}}. \tag{10.5}$$

Beispiel 4 Die 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ist. In diesem Fall gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ -6 & 3 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Ist A eine invertierbare Matrix, so ist jedes Gleichungssystem $Ax = b$ eindeutig lösbar, und man kann die Lösung x berechnen aus $x = A^{-1}b$. Eine weitere Möglichkeit der Berechnung der Lösung bietet die Cramersche Regel.

Satz 10.9 (Cramersche Regel) *Die Koeffizientenmatrix A des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ sei eine invertierbare n×n-Matrix mit den Spalten $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Die Komponenten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Lösungsvektors $x = A^{-1}b$ sind dann gegeben durch*

$$x_k = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n)}{\det(a_1, a_2, \ldots, a_n)}. \tag{10.6}$$

Im Nenner von (10.6) steht also die Determinante von A und im Zähler die Determinante der Matrix, die aus A entsteht, wenn die k-te Spalte von A durch die rechte Seite b des Gleichungssystems ersetzt wird.

Beweis Wir führen den Beweis nur für die erste Komponente x_1 des Lösungsvektors. Der Beweis für die übrigen Komponenten verläuft analog. Sei also $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ die eindeutig bestimmte Lösung von $Ax = b$. Dann ist $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = b$ und daher

$$\begin{aligned}
&\det(b, a_2, a_3, \ldots, a_n) = \\
&\quad = \det(x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n, a_2, a_3, \ldots a_n) \\
&\quad = \det(x_1a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) + \det(x_2a_2, a_2, a_3, \ldots a_n) \\
&\qquad + \ldots + \det(x_na_n, a_2, a_3, \ldots, a_n) && \text{(Satz 10.4(b))} \\
&\quad = x_1 \det(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) + x_2 \det(a_2, a_2, a_3, \ldots, a_n) \\
&\qquad + \ldots + x_n \det(a_n, a_2, a_3, \ldots, a_n) && \text{(Satz 10.4(b))} \\
&\quad = x_1 \det A + 0 + \ldots + 0 && \text{(Satz 10.5(b))} \\
&\quad = x_1 \det A.
\end{aligned}$$

Wegen $\det A \neq 0$ ist also $x_1 = \det(b, a_2, a_3, \ldots, a_n)/\det A$. $\blacksquare$

Beispiel 6 Wir lösen das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 8x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & & & + & 6x_3 & = & 1 \\ & & -3x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \end{array}$$

mit der Cramerschen Regel. Hier ist

$$A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} (b, a_2, a_3) &= \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 1 & 0 & 6 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad (a_1, b, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \\ (a_1, a_2, b) &= \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Berechnung der Determinanten (nach Sarrus oder Entwicklungssatz) liefert $\det A = -2$ sowie

$$\det(b, a_2, a_3) = -112, \quad \det(a_1, b, a_3) = 60, \quad \det(a_1, a_2, b) = 93.$$

Die Lösung des Systems ist also

$$x_1 = 56, \quad x_2 = -30, \quad x_3 = -46,5. \qquad \blacksquare$$

Man beachte, dass weder die Berechnung der inversen Matrix nach (10.5) noch die Lösung eines linearen Gleichungssystems über die Cramersche Regel für große n praktikabel sind, da der Aufwand zur Berechnung der Determinanten schnell ansteigt. Wir werden also weiter den Gauß-Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme benutzen.

11 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir wissen bereits, dass man jede lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ durch eine $n\times n$-Matrix A beschreiben kann, d.h. es ist $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Die Matrix A hängt dabei von der gewählten Basis in $\mathbb{K}^n$ ab. Die Frage ist nun, ob man eine solche Basis findet, in der die Multiplikation mit A besonders einfach wird. Diese Frage wird uns auf die Begriffe Eigenwert und Eigenvektor einer Matrix und damit in die Spektraltheorie linearer Abbildungen führen. Als wichtige Anwendung diskutieren wir im nächsten Abschnitt die Lösungen quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

11.1 Definitionen und einfache Eigenschaften

Am einfachsten ist die Anwendung einer Matrix A auf einen Vektor x wohl dann, wenn wir nur mit einer geeigneten Zahl λ multiplizieren müssen, d.h. wenn $Ax = \lambda x$. Die Idee ist daher, nach einer Basis von $\mathbb{K}^n$ zu suchen, die aus Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ besteht, für die es jeweils Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $Ax_i = \lambda_i x_i$ gibt. Die Darstellung von A in dieser Basis wäre dann einfach die Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Definition 11.1 *Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine $n\times n$-Matrix. Die komplexe Zahl λ heißt ein* Eigenwert *von A, wenn es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ mit $x \neq 0$ gibt, so dass die* Eigenwertgleichung

$$Ax = \lambda x \quad \textit{bzw.} \quad (A - \lambda I)x = 0$$

erfüllt ist. Jeder solche Vektor x heißt ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

Lemma 11.2 *Sei λ ein Eigenwert von A. Nimmt man zu den zu λ gehörigen Eigenvektoren von A noch den Nullvektor hinzu, so erhält man einen linearen Raum, den so genannten* Eigenunterraum von A zum Eigenwert λ.

Dies ist leicht einzusehen. Seien x_1, x_2 Eigenvektoren zum Eigenwert λ und sei $t \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned} A(tx_1) &= tAx_1 = t(\lambda x_1) = \lambda(tx_1), \\ A(x_1 + x_2) &= Ax_1 + Ax_2 = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2), \end{aligned}$$

d.h. tx_1 und $x_1 + x_2$ sind Eigenvektoren oder gleich Null. ∎

Nach Definition 11.1 ist λ genau dann ein Eigenwert von A, wenn das homogene Gleichungssystem

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{11.1}$$

eine nichttriviale Lösung $x \neq 0$ besitzt (man beachte, dass das System (11.1) für *jedes* λ den Nullvektor als Lösung hat). Eine nichttriviale Lösung von (11.1) existiert nun genau dann, wenn die Matrix $A - \lambda I$ nicht invertierbar ist (andernfalls

wäre nämlich $x = (A - \lambda I)^{-1} \cdot 0 = 0$ die einzige Lösung des Systems). Nach Satz 10.8 ist die genau dann der Fall, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{11.2}$$

Berechnet man $\det(A - \lambda I)$ in Abhängigkeit von λ, so erhält man ein Polynom in λ vom Grad n.

Definition 11.3 *Die Gleichung* (11.2) *heißt die* charakteristische Gleichung der Matrix A*, und das Polynom* $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ *heißt das* charakteristische Polynom der Matrix A*.*

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (dessen reelle Version wir in Satz 5.19 kennen gelernt haben, hat jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten genau n komplexe Nullstellen (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt). Daher gilt

Satz 11.4 (a) *Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ besitzt genau n komplexe Eigenwerte (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt).*

(b) *Ist $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, so ist mit jedem nichtreellen Eigenwert λ auch die konjungiert-komplexe Zahl $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von A.*

Beispiel 1 Für $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ist $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ und daher

$$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(2-\lambda) - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms und damit die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = -2$. Analog erhält man für

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = (-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 1$$

und damit die Eigenwerte $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Eine reelle Matrix muss also keine reellen Eigenwerte besitzen. Nun sei

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad C - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -3 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Mit der Sarrusschen Regel findet man

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda I) &= (-\lambda)^2(2-\lambda) + 3 - 3 - (2-\lambda) - 3(-\lambda) - (-3)(-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix C sind also $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 1$. Schließlich sei

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad D - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ein doppelter Eigenwert. ■

Zur Berechnung der zu einem Eigenwert λ von A gehörigen Eigenvektoren muss man das homogene Gleichungssystem $(A - \lambda I)x = 0$ lösen.

Beispiel 2 Wir berechnen die Eigenvektoren der Matrizen C und D aus Beispiel 1. Zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ von C erhält man die Matrix

$$C - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vertauschen von 1. und 3. Zeile und Division der 2. Zeile durch 3 führen auf die folgende Matrix, die wir mit den Operationen des Gaußalgorithmus weiter vereinfachen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind also alle Vektoren

$$t(1,1,1)^T \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}, \tag{11.3}$$

und diese Vektoren bilden auch den Eigenunterraum von C zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$. Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2$ sind gerade die Vektoren (11.3) mit $t \neq 0$. Ganz analog findet man die Eigenvektoren

$$t(0,1,-1)^T \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \qquad \text{bzw.} \qquad t(1,0,1)^T \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

zu den Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ bzw. $\lambda_3 = 1$ von C. Für die Matrix D lautet das entsprechende Gleichungssystem zur Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_2 = 0.$$

Alle Eigenvektoren haben also die Gestalt

$$t(1,0) \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$ ■

Wir kommen zu einer wichtigen Eigenschaft von Eigenvektoren.

Satz 11.5 *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind linear unabhängig.*

Beweis Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A und $v_1, \ldots, v_k$ seien zugehörige Eigenvektoren. Wir müssen zeigen, dass aus

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0 \quad \text{folgt} \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0 \tag{11.4}$$

und benutzen dazu vollständige Induktion.

Für $k = 1$ ist die Aussage (11.4) offenbar richtig. Wir nehmen an, dass sie auch für $k-1$ paarweise verschiedene Eigenwerte richtig ist und zeigen, dass sie dann auch für k paarweise verschiedene Eigenwerte gilt. Eine Anwendung von A auf die Gleichung

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k = 0 \tag{11.5}$$

ergibt

$$\alpha_1 A\, v_1 + \ldots + \alpha_{k-1}\, A v_{k-1} + \alpha_k\, A v_k = 0$$

bzw.

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k \lambda_k v_k = 0. \tag{11.6}$$

Andererseits liefert Multiplikation von (11.5) mit λ_k

$$\alpha_1 \lambda_k v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} \lambda_k v_{k-1} + \alpha_k \lambda_k v_k = 0. \tag{11.7}$$

Wir subtrahieren (11.6) von (11.7) und erhalten

$$\alpha_1(\lambda_k - \lambda_1) v_1 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) v_{k-1} = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind $v_1, \ldots, v_{k-1}$ linear unabhängig. Also ist

$$\alpha_1(\lambda_k - \lambda_1) = \ldots = \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0,$$

und da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, folgt hieraus $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$. Aus (11.5) folgt schließlich noch $\alpha_k = 0$, d.h. die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ sind tatsächlich linear unabhängig. ∎

Da die Dimension von $\mathbb{K}^n$ gleich n ist, kann wegen Satz 11.5 eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ höchstens n linear unabhängige Eigenvektoren besitzen. Genauer gilt:

Satz 11.6 *Ist λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ der Vielfachheit m (d.h. ist λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A der Vielfachheit m), so besitzt A höchstens m linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert λ, d.h. die Dimension des Eigenunterraumes von A zum Eigenwert λ ist höchstens m.*

Ist insbesondere λ ein einfacher Eigenwert von A, so ist der zugehörige Eigenunterraum (also der Kern von $A - \lambda I$) eindimensional. Es hätte also in Beispiel 2 genügt, einen Eigenvektor von C zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ zu *erraten*, um die Beschreibung (11.3) des Eigenunterraums von C zu diesem Eigenwert zu erhalten.

Hier sind noch zwei weitere Aussagen über Eigenwerte beliebiger Matrizen.

Satz 11.7 *Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von $A = (a_{ij})_{n,n}$, so gilt*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \tag{11.8}$$

sowie

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det A. \tag{11.9}$$

Die Summe $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ der Hauptdiagonalelemente einer Matrix A heißt auch die *Spur* von A. Aus (11.9) folgt insbesondere, dass eine quadratische Matrix genau dann invertierbar ist, wenn keiner ihrer Eigenwerte Null ist.

Satz 11.8 *Sei $k \geq 0$ eine ganze Zahl. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, so sind $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ die Eigenwerte von A^k. Ist A invertierbar, so sind $\lambda_1^{-k}, \ldots, \lambda_n^{-k}$ die Eigenwerte von $A^{-k} = (A^{-1})^k$.*

Wir haben hier die Vereinbarung $A^0 = I$ benutzt.

11.2 Koordinatentransformationen

Vorbereitend für die nächsten Abschnitte sehen wir uns nun an, wie sich die Darstellung eines Vektors oder einer Matrix bei einem Basiswechsel verändert. Dazu sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ (wer möchte, darf sich $V = \mathbb{K}^n$ vorstellen). Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis in V, so kann jeder Vektor $v \in V$ auf eindeutige Weise als Linearkombination

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \quad \text{mit} \quad x_i \in \mathbb{K} \tag{11.10}$$

geschrieben werden. Ist $f_1, \ldots, f_n$ eine weitere Basis von V, so kann v auch eindeutig geschrieben werden als

$$v = y_1 f_1 + \ldots + y_n f_n \quad \text{mit} \quad y_i \in \mathbb{K}. \tag{11.11}$$

Uns interessiert der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten x_i in (11.10) und y_i in (11.11). Dazu stellen wir jeden Basisvektor f_j in der Basis $e_1, \ldots, e_n$ dar:

$$f_j = c_{1j} e_1 + \ldots + c_{nj} e_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i$$

mit eindeutig bestimmten *Zerlegungskoeffizienten* c_{ij}. Einsetzen in (11.11) ergibt

$$v = \sum_{j=1}^{n} y_j f_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \Big) e_i,$$

und ein Koeffizientenvergleich mit (11.10) liefert schließlich

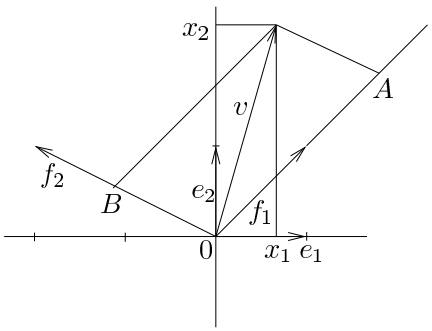
$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11.12}$$

Wir können diese Gleichungen auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad x = Cy. \tag{11.13}$$

Die j. Spalte der Transformationsmatrix C besteht gerade aus den Zerlegungskoeffizienten von f_j bzgl. der Basis $e_1, \dots, e_n$. Bei Kenntnis von C können wir mit (11.13) aus der Darstellung (11.11) des Vektors v die Darstellung (11.10) bestimmen. Da die Matrix C invertierbar ist (ihre Spalten sind im wesentlichen gerade die linear unabhängigen Vektoren $f_1, \dots, f_n$), kann man auch umgekehrt (11.11) aus (11.10) durch $y = C^{-1}x$ bestimmen.

Beispiel 3 Wir betrachten die Basen $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^2$.



Dann ist

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_2 \\ f_2 &= -2e_1 + e_2 \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

In der Skizze ist $\overrightarrow{0A}$ der Vektor $y_1 f_1$ und $\overrightarrow{0B}$ der Vektor $y_2 f_2$. ■

Nun betrachten wir eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$. Diese hat bezüglich der Basis $e_1, \dots, e_n$ die Matrixdarstellung $A = (a_{ij})_{n,n}$ mit

$$Ae_i = a_{1i}e_1 + \dots + a_{ni}e_n \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

und bezüglich der Basis $f_1, \dots, f_n$ die Matrixdarstellung $B = (b_{ij})_{n,n}$ mit

$$Af_i = b_{1i}f_1 + \dots + b_{ni}f_n \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Sei nun $v \in V$ ein beliebiger Vektor und $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ bzw. $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ seine Koordinatenvektoren bezüglich der Basis $e_1, \dots, e_n$ bzw. $f_1, \dots, f_n$. Dann hat $\varphi(v)$ die Darstellung Ax bezüglich der Basis $e_1, \dots, e_n$ und By bezüglich der Basis $f_1, \dots, f_n$. Aus (11.13) wissen wir, dass

$$Ax = CBy \quad \text{und} \quad x = Cy.$$

Durch Einsetzen folgt hieraus $ACy = CBy$, und da dies für alle $y \in \mathbb{K}^n$ gelten muss, ist $AC = CB$ bzw.

$$B = C^{-1}AC. \tag{11.14}$$

Ist also A die Matrixdarstellung der linearen Abbildung φ in der Basis $e_1, \ldots, e_n$, so ist $C^{-1}AC$ die Matrixdarstellung derselben Abbildung in der Basis $f_1, \ldots, f_n$.

Definition 11.9 *Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ heißen* ähnlich, *wenn es eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{K}^{n,n}$ so gibt, dass*

$$B = C^{-1}AC.$$

Satz 11.10 *Ähnliche Matrizen besitzen gleiche charakteristische Polynome und folglich auch gleiche Eigenwerte.*

Dies folgt sofort aus

$$B - \lambda I = C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C = C^{-1}(A - \lambda I)C$$

und aus der Multiplikativität der Determinante (Satz 10.4(e)). ∎

Um die Eigenwerte von A zu berechnen, kann man also ebenso die Eigenwerte einer zu A ähnlichen Matrix berechnen, falls dies einfacher ist. Auf dieser Idee beruhen viele numerische Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten.

11.3 Diagonalähnliche Matrizen

Wir kommen zu unserem Hauptthema zurück: Gibt es für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A? Falls alle Eigenwerte von A einfach sind, kann diese Frage bejaht werden. In diesem Fall hat A nämlich n verschiedene Eigenwerte, zu jedem dieser Eigenwerte findet man einen Eigenvektor, und diese n Eigenvektoren sind linear unabhängig nach Satz 11.5, d.h. sie bilden eine Basis. Hat dagegen die Matrix A mehrfache Eigenwerte, so braucht eine Basis aus Eigenvektoren nicht zu existieren, wie die Matrix D aus Beispiel 2 zeigt.

In diesem Abschnitt sehen wir uns Matrizen an, für die eine Basis aus Eigenvektoren existiert. Sei also $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, und es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$, die eine Basis von $\mathbb{K}^n$ bilden. Die Eigenwertgleichungen

$$Av_k = \lambda_k v_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

können zu einer einzigen Matrixgleichung zusammengefasst werden:

$$A(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

bzw.

$$AT = T\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

mit $T = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Da die Spalten von T linear unabhängig sind, ist T invertierbar, und wir erhalten

$$T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \tag{11.15}$$

Definition 11.11 *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt* diagonalähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, so dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.*

Matrizen, für die es eine Basis aus Eigenvektoren gibt, sind also diagonalähnlich. Mit anderen Worten: stellt man eine solche Matrix in der Basis dar, die aus ihren Eigenvektoren besteht, so erhält man eine Diagonalmatrix. Auch die Umkehrung ist richtig: Ist A diagonalähnlich, d.h. ist

$$C^{-1}AC = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

so sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Eigenwerte von A, und die k-te Spalte von C ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_k. Da C invertierbar ist, sind die Spalten von C linear unabhängig, d.h. die Eigenvektoren von A bilden eine Basis.

Satz 11.12 *Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann diagonalähnlich, wenn es eine Basis von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A gibt.*

Für die Matrix C aus Beispiel 2 ist beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In den nächsten Abschnitten wollen wir Klassen von Matrizen angeben, für die man von vornherein weiß, dass sie diagonalähnlich sind (alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = A$ haben beispielsweise diese Eigenschaft). Vorher sehen wir uns Basen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ genauer an.

11.4 Orthonormalbasen

Besonders angenehm ist das Arbeiten mit Basen, deren Vektoren senkrecht aufeinander stehen und die Länge (Norm) 1 haben. Die Basis $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n$ aus den Koordinateneinheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ hat beispielsweise diese Eigenschaft. Um solche Basen auch in $\mathbb{C}^n$ betrachten zu können, verallgemeinern wir die Begriffe Skalarprodukt und Norm auf Vektoren aus $\mathbb{C}^n$.

Definition 11.13 (a) *Das* Skalarprodukt *der Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{C}^n$ ist die komplexe Zahl*

$$\langle x, y\rangle := x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}. \tag{11.16}$$

(b) *Zwei Vektoren* $x, y \in \mathbb{C}^n$ *heißen* senkrecht*, wenn* $\langle x, y\rangle = 0$.

(c) *Die* Norm *des Vektors* $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ *ist die Zahl*

$$\|x\| := \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}. \tag{11.17}$$

Man beachte, dass für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ diese Begriffe mit den früher eingeführten übereinstimmen. Wir werden im Weiteren die Schreibweise $\langle x, y\rangle$ statt $x \cdot y$ für das Skalarprodukt benutzen, um Verwechslungen mit dem Matrixprodukt zu vermeiden. Die Rechenregeln sind ähnlich wie im Reellen. Es gelten weiterhin die Beziehung

$$\langle x, x\rangle = \|x\|^2,$$

die Dreiecksungleichung

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

sowie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\, \|y\|.$$

Man beachte lediglich, dass für $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle, \quad \text{aber} \quad \langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle.$$

Definition 11.14 *Eine Basis* $e_1, \ldots, e_n$ *von* $\mathbb{C}^n$ *heißt* Orthonormalbasis*, wenn*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \textit{für alle } i, j = 1, \ldots, n.$$

Wir lernen nun das *Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren* kennen, das aus jeder Basis von $\mathbb{C}^n$ (oder $\mathbb{R}^n$) eine Orthonormalbasis erzeugt. Sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$. Wir wählen $e_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$. Dann ist natürlich $\langle e_1, e_1\rangle = \|e_1\| = 1$.

Wir wählen den Ansatz $e_2' = \alpha_{21} e_1 + v_2$ und bestimmen α_{21} so, dass $\langle e_2', e_1\rangle = 0$. Wegen

$$0 = \langle e_2', e_1\rangle = \langle \alpha_{21} e_1 + v_2, e_1\rangle = \alpha_{21}\langle e_1, e_1\rangle + \langle v_2, e_1\rangle = \alpha_{21} + \langle v_2, e_1\rangle$$

muss $\alpha_{21} = -\langle v_2, e_1\rangle$ sein. Also ist

$$e_2' = -\langle v_2, e_1\rangle e_1 + b_2,$$

und wir normieren noch: $e_2 := e_2'/\|e_2'\|$. Dann ist $\|e_2\| = 1$ und $\langle e_2, e_1\rangle = 0$. Für das nächste Element setzen wir an $e_3' = \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2 + v_3$ und bestimmen α_{31} und α_{32} aus $\langle e_3', e_1\rangle = \langle e_3', e_2\rangle = 0$. Wegen

$$0 = \langle e_3', e_1\rangle = \langle \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_3 + v_3, e_1\rangle = \alpha_{31} + \langle v_3, e_1\rangle$$

ist $\alpha_{31} = -\langle v_3, e_1\rangle$, und analog erhält man $\alpha_{32} = -\langle v_3, e_2\rangle$. Also ist

$$e_3' = -\langle v_3, e_1\rangle e_1 - \langle v_3, e_2\rangle e_2 + v_3,$$

und wir setzen noch $e_3 := e_3'/\left\|e_3'\right\|$. Wir fahren so fort und erhalten im k-ten Schritt

$$e_k' = -\langle v_k, e_1\rangle e_1 - \ldots - \langle v_k, e_{k-1}\rangle e_{k-1} + v_k \tag{11.18}$$

und

$$e_k = \frac{e_k'}{\|e_k'\|}\,. \tag{11.19}$$

Dabei gilt $\langle e_k, e_1\rangle = \ldots = \langle e_k, e_{k-1}\rangle = 0$ und $\|e_k\| = 1$. Wir müssen uns lediglich noch überlegen, dass die e_k' niemals die Nullvektoren sind. Nehmen wir an, es sei $e_k' = 0$. Aus (11.18) folgt dann

$$v_k = \langle v_k, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle v_k, e_{k-1}\rangle e_{k-1}. \tag{11.20}$$

Nach Konstruktion ist aber jeder der Vektoren $e_1, \ldots e_{k-1}$ eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}$. In (11.20) wird also der Vektor v_k als eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}$ dargestellt. Das ist aber unmöglich, da wir die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ als linear unabhängig vorausgesetzt hatten.

Nach n Schritten erhält man aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{C}^n$. Allgemein kann man das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren benutzen, um aus einem linear unabhängigen System $v_1, \ldots, v_k$ von Vektoren ein Orthonormalsystem $e_1, \ldots, e_k$ mit

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$$

zu erzeugen.

Beispiel 4 Seien

$$v_1 = (1,1,1,1)^T, \quad v_2 = (1,0,1,0)^T, \quad v_3 = (0,0,1,1)^T.$$

Dann erhalten wir nacheinander

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1/\left\|v_1\right\| = v_1/2 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)^T,\\
e_2' &= -\langle v_2, e_1\rangle e_1 + v_2\\
&= -1\cdot\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T + (1,0,1,0)^T = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T,\\
e_2 &= e_2'/\left\|e_2'\right\| = e_2' = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)^T,\\
e_3' &= -\langle v_3, e_1\rangle e_1 - \langle v_3, e_2\rangle e_2 + v_3\\
&= -\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T - 0\cdot e_2 + (0,0,1,1)^T = \frac{1}{2}(-1,-1,1,1)^T,\\
e_3 &= e_3'/\left\|e_3\right\| = e_3' = \frac{1}{2}(-1,-1,1,1)^T.
\end{aligned}$$

Die Vektoren e_1, e_2, e_3 spannen den gleichen Raum auf wie v_1, v_2, v_3, und sie bilden ein Orthonormalsystem. ∎

11.5 Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen

Für jede Matrix $A = (a_{ij})_{m,n} \in \mathbb{C}^{m,n}$ setzt man

$$\overline{A} := (\overline{a_{ij}})_{m,n} \quad \text{und} \quad A^* := \overline{A}^T.$$

Die Matrix $A^* \in \mathbb{C}^{n,m}$ heißt die zu A *adjungierte* Matrix.

Definition 11.15 *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt*

symmetrisch*, wenn $A^T = A$, und*
orthogonal*, wenn $A^T = A^{-1}$.*

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ heißt

hermitesch *(oder* selbstadjungiert*), wenn $A^* = A$, und*
unitär*, wenn $A^* = A^{-1}$.*

Beispiel 5 Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}i} & 0 \\ 0 & e^{i/2} \end{pmatrix}$$

sind symmetrisch, selbstadjungiert, orthogonal bzw. unitär. ∎

Für den Rest dieses Kapitels beschäftigen wir uns nur mit dem reellen Fall, d.h. mit orthogonalen bzw. symmetrischen Matrizen. Alle Überlegungen bleiben aber auch im komplexen Fall richtig, wenn man transponierte Matrizen durch adjungierte ersetzt und die Begriffe orthogonal und symmetrisch durch unitär und selbstadjungiert.

Eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist charakterisiert durch die Gleichungen

$$AA^T = A^T A = I. \tag{11.21}$$

Das bedeutet, dass die Spaltenvektoren von A (ebenso wie die Zeilenvektoren) eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Man rechnet auch leicht nach, dass Produkte und Inverse orthogonaler Matrizen wieder orthogonale Matrizen sind. Für eine weitere Eigenschaft benötigen wir

Lemma 11.16 *Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle\,. \tag{11.22}$$

Beweis Sei $A = (a_{ij})_{n,n}$. $A^T = B = (b_{ij})_{n,n}$ und $x = (x_i)_n$, $y = (y_i)_n$. Dann ist $b_{ij} = a_{ji}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \sum_{i=1}^{n}(Ax)_i y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j y_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} b_{ji}y_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j (By)_j = \langle x, By\rangle = \langle x, A^T y\rangle.\end{aligned}$$

■

Ist nun A sogar eine orthogonale Matrix, so ist wegen (11.21) für beliebige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y\rangle = \langle A^T Ax, y\rangle = \langle Ax, (A^T)^T y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle, \tag{11.23}$$

d.h. die Multiplikation mit A ändert weder die Länge eines Vektors noch den Winkel zwischen zwei Vektoren. Die orthogonalen 2×2 und 3×3-Matrizen stammen gerade von den Drehungen und Spiegelungen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ her (vgl. Abschnitt 8.2 zu den Drehungen des $\mathbb{R}^2$).

Wir kommen nun zur Eigenwerttheorie symmetrischer Matrizen.

Satz 11.17 *Die Eigenwerte symmetrischer Matrizen sind reell.*

Beweis Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische Matrix, $\lambda = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A und $x \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist $A - \alpha I$ wieder symmetrisch, und deshalb ist

$$\begin{aligned}0 &= \|(A - \lambda I)x\|^2 = \langle Ax - \lambda x,\, Ax - \lambda x\rangle \\ &= \langle Ax - \alpha x - \beta i x,\, Ax - \alpha x - \beta i x\rangle \\ &= \langle Ax - \alpha x,\, Ax - \alpha x\rangle - \beta i\langle x, Ax - \alpha x\rangle - \overline{\beta i}\langle Ax - \alpha x, x\rangle + \beta i\overline{\beta i}\langle x, x\rangle \\ &= \|Ax - \alpha x\|^2 - \beta i\langle x,\, (A - \alpha I)x\rangle + \beta i\langle (A - \alpha I)x, x\rangle + \beta^2\|x\|^2 \\ &= \|Ax - \alpha x\|^2 + \beta^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\beta^2\|x\|^2 = 0$, also $\beta\|x\| = 0$, und da $\|x\| \neq 0$, muss $\beta = 0$ sein. ■

Satz 11.18 *Eigenvektoren symmetrischer Matrizen, die zu unterschiedlichen Eigenwerten gehören, stehen senkrecht aufeinander.*

Beweis Seien $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte von A und x, y zugehörige Eigenvektoren. Dann ist

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle = \langle v, \mu w\rangle = \mu\langle v, w\rangle,$$

also

$$(\lambda - \mu)\,\langle v, w\rangle = 0.$$

Da $\lambda \neq \mu$ ist, muss $\langle v, w\rangle = 0$ sein. ■

Satz 11.19 *Zu jeder symmetrischen $n\times n$-Matrix A gibt es eine aus Eigenvektoren von A bestehende Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.*

Beweisidee Sei λ_1 ein Eigenwert von A und x_1 ein zugehöriger Eigenvektor. Wir betrachten die Menge aller zu x_1 senkrechten Vektoren

$$V_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x_1\rangle = 0\}.$$

Diese Menge ist ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen, dass V_1 invariant ist für A, d.h. für jeden Vektor $x \in V_1$ liegt auch Ax wieder in V_1. Sei also $x \in V_1$. Dann ist nach Lemma 11.16

$$\langle Ax, x_1\rangle = \langle x, Ax_1\rangle = \langle x, \lambda_1 x_1\rangle = \lambda_1\langle x, x_1\rangle = 0,$$

also tatsächlich $Ax \in V_1$.

Die Matrix A definiert daher eine lineare Abbildung von V_1 nach V_1, die wir mit einer $(n-1)\times(n-1)$-Matrix identifizieren können. Diese Matrix besitzt einen Eigenwert λ_2 und einen zugehörigen Eigenvektor $x_2 \in V_1$, die zugleich natürlich auch Eigenwert bzw. Eigenvektor von A sind.

Wir fahren so fort, d.h. wir betrachten die Menge V_2 aller Vektoren, die auf x_1 und x_2 senkrecht stehen, finden einen weiteren Eigenvektor x_3, u.s.w. Nach n Schritten haben wir n Eigenvektoren von A gefunden, die nach Konstruktion paarweise aufeinander senkrecht stehen. Wir normieren diese Vektoren und erhalten eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$, die ausschließlich aus Eigenvektoren von A besteht. ∎

Folgerung 11.20 *Jede symmetrische $n\times n$-Matrix ist diagonalähnlich. Genauer: ist A eine symmetrische $n\times n$-Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so gibt es eine orthogonale Matrix T mit*

$$T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Beweis Aus Abschnitt 11.3 wissen wir, dass die Spalten von T die Eigenvektoren von A sind. Wählen wir diese Eigenvektoren als Orthonormalsystem (was nach Satz 11.19 möglich ist), so wird T eine orthogonale Matrix. ∎

Praktisch kann man bei der Bestimmung einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren einer symmetrischen $n\times n$-Matrix A wie folgt vorgehen:

1. Man bestimmt die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ von A sowie ihre Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_d$. Es ist also $n_1 + \ldots + n_d = n$.
2. Zu jedem Eigenwert λ_k der Vielfachheit n_k bestimmt man n_k linear unabhängige Eigenvektoren.
3. Im Fall $n_k > 1$ werden diese Eigenvektoren mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren (Abschnitt 11.4) orthogonalisiert.
4. Alle Eigenvektoren werden normiert.

11.6 Quadratische Gleichungen

Wir sehen uns nun quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten an und wollen im nächsten Abschnitt ihre Lösungsmenge beschreiben. Aus der Schule kennen wir quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten x

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

und wir wissen, dass eine solche Gleichung keine, eine oder zwei reelle Lösungen besitzen kann. Die allgemeine quadratische Gleichung in zwei Unbekannten x_1 und x_2 lautet

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0 \tag{11.24}$$

mit reellen Koeffizienten a_{ij}, b_i und c. Die Gleichung (11.24) läßt sich mit Hilfe von Matrizen kompakter schreiben. Dazu seien

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dann kann man (11.24) schreiben als

$$\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c = 0.$$

(Nachrechnen!) Allgemein läßt sich die quadratische Gleichung in n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0$$

mit der *symmetrischen* Matrix $A = (a_{ij})_{n,n}$ und den Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

schreiben als

$$\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c = 0. \tag{11.25}$$

Die Abbildung $x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ heißt auch eine *quadratische Form*.

Bevor wir uns der Beschreibung der Lösungsmenge der Gleichung (11.25) zuwenden, führen wir noch einige Begriffe ein, die wir bei der Behandlung der Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher benötigen werden.

Definition 11.21 *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt* positiv definit (positiv semidefinit)*, wenn*

$$\langle Ax, x\rangle > 0 \quad (\textit{bzw. } \langle Ax, x\rangle \geq 0) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0.$$

Die Matrix A heißt negativ definit (negativ semidefinit)*, wenn $-A$ positiv definit (positiv semidefinit) ist. Schließlich heißt A* indefinit*, wenn $\langle Ax, x\rangle$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt.*

Satz 11.22 *Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) *A ist positiv definit.*

b) *Alle Eigenwerte von A sind positiv.*

c) *Alle Determinanten*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

sind positiv.

Die Äquivalenz von (a) und (b) erhält man leicht aus Folgerung 11.20. Die Äquivalenz von (a) und (c) ist auch bekannt als *Hurwitz-Kriterium*.

Beispiel 6 Zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ gehört die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 .$$

Die Matrix A ist positiv definit, da ihre Unterdeterminanten

$$\det(4) = 4 \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 8$$

positiv sind (Hurwitz-Kriterium). Zu diesem Ergebnis wären wir auch durch die Berechnung der Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$$

von A gelangt, die beide positiv sind. Dagegen ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

indefinit, was man wie folgt schnell einsehen kann. Die Spur von A ist 16. Da die Spur gleich der Summe der Eigenwerte ist, ist mindestens ein Eigenwert von A positiv. Die Determinante von A ist -4, also negativ. Da die Determinante gleich dem Produkt der Eigenwerte von A ist, ist mindestens einer der Eigenwerte von A negativ. ∎

11.7 Hauptachsentransformationen und Klassifikation der Kurven und Flächen 2. Ordnung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine symmetrische Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Uns interessiert die Menge aller Lösungen $x \in \mathbb{R}^n$ der quadratischen Gleichung

$$\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c = 0. \tag{11.26}$$

In zwei Schritten transformieren wir diese Gleichung in eine Gestalt, aus der wir die Lösungsmenge unmittelbar ablesen können.

1. Schritt Wir beseitigen die gemischten Terme 2. Ordnung wie $2a_{ij}x^ix^j$. Dazu bestimmen wir die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A und ein dazu gehörendes System $v_1, \ldots, v_n$ orthonormierter Eigenvektoren. Weiter sei C die orthogonale Matrix, deren Spalten gerade die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind. Nach Folgerung 11.20 ist dann

$$C^TAC = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Wir führen nun statt $x_1, \ldots, x_n$ neue Variable $y_1, \ldots, y_n$ mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Cy$$

ein. Dann wird aus (11.26)

$$\langle ACy, Cy\rangle + \langle b, Cy\rangle + c = 0$$

bzw.

$$\langle C^TACy, y\rangle + \langle C^Tb, y\rangle + c = 0,$$

d.h.

$$\langle \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)y, y\rangle + \langle d, y\rangle + c = 0 \tag{11.27}$$

mit $d = (d_1, \ldots, d_n)^T := C^Tb$. Damit haben wir unser Ziel im ersten Schritt erreicht, denn ausgeschrieben lautet (11.27)

$$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \ldots + \lambda_ny_n^2 + d_1y_1 + d_2y_2 + \ldots + d_ny_n + c = 0. \tag{11.28}$$

Die Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix entspricht geometrisch einer Drehung des Koordinatensystems um den Nullpunkt. Durch eine solche Drehung läßt sich also stets das Verschwinden der gemischten Glieder erreichen.

2. Schritt Falls $\lambda_k \neq 0$, beseitigen wir das Linearglied d_ky_k in (11.28). Dazu schreiben wir $\lambda_ky_k^2 + d_ky_k$ als

$$\begin{aligned} \lambda_k(y_k^2 + \frac{d_k}{\lambda_k}\, y_k) &= \lambda_k\Big(y_k^2 + \frac{d_k}{\lambda_k}\, y_k + \frac{d_k^2}{4\lambda_k^2}\Big) - \frac{d_k^2}{4\lambda_k} \\ &= \lambda_k\Big(y_k + \frac{d_k}{2\lambda_k}\Big)^2 - \frac{d_k^2}{4\lambda_k} \end{aligned}$$

(quadratische Ergänzung). Den Summanden $-\frac{d_k^2}{4\lambda_k}$ nehmen wir in das Absolutglied auf, und wir führen eine neue Variable

$$z_k := y_k + \frac{d_k}{2\lambda_k}$$

ein. Ist $\lambda_k = 0$, so ersetzen wir einfach y_k durch z_k. Geometrisch gesehen haben wir damit das Koordinatensystem verschoben.

Das Resultat dieser beiden Schritte sieht wie folgt aus. Sind alle Eigenwerte von A ungleich Null, so wird aus (11.26)

$$\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2 + c = 0.$$

Sind die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ungleich Null und die Eigenwerte $\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_n$ gleich Null, und sind auch die Koeffizienten $d_{s+1}, \ldots, d_n$ in (11.28) gleich Null, so erhalten wir

$$\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_s z_s^2 + c = 0 \quad \text{mit } s < n.$$

Seien schließlich die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ungleich Null, die Eigenwerte $\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_n$ gleich Null, und wenigstens einer der Koeffizienten $d_{s+1}, \ldots, d_n$ ungleich Null. Der Bestimmtheit halber sei etwa $d_n \neq 0$. Dann behalten wir die Variablen $z_1, \ldots, z_{n-1}$ und ersetzen z_n durch die neue Variable z_n' mit

$$-2z_n' := d_{s+1} z_{s+1} + \ldots + d_n z_n + c.$$

Wir erhalten dann die Gleichung

$$\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_s z_s^2 - 2z_n = 0 \quad \text{mit } s < n,$$

wobei wir die Variable z_n' wieder mit z_n bezeichnet haben.

Satz 11.23 *Durch die oben beschriebenen Koordinatentransformationen läßt sich jede quadratische Gleichung in n Variablen*

$$\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c = 0$$

in eine der folgenden Formen bringen:

Typ 1: $\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_n z_n^2 + c = 0$ *mit* $\lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_n \neq 0$,

Typ 2: $\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_s z_s^2 + c = 0$ *mit* $\lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_s \neq 0,\ s < n$,

Typ 3: $\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_s z_s^2 - 2z_n = 0$ *mit* $\lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_s \neq 0,\ s < n$.

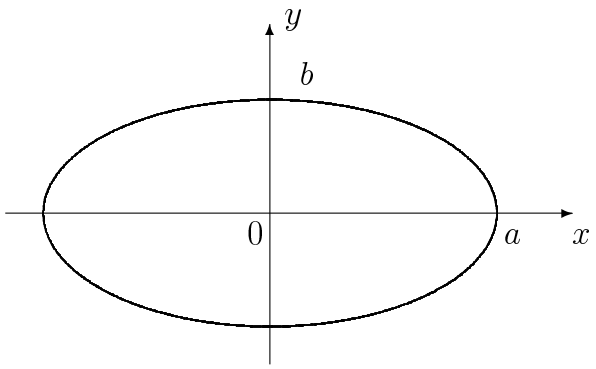
Wir sehen uns nun die Gleichungen in zwei Veränderlichen z_1, z_2 genauer an. Diese Veränderlichen bezeichnen wir wie üblich mit x und y. Im Fall $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ und $c < 0$ (Typ 1) erhalten wir

$$\frac{\lambda_1}{-c}\, x^2 + \frac{\lambda_2}{-c}\, y^2 = 1.$$

Mit den neuen Parametern $\frac{1}{a^2} := \frac{\lambda_1}{-c} > 0$ und $\frac{1}{b^2} := \frac{\lambda_2}{-c} > 0$ wird hieraus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung beschreibt eine *Ellipse mit den Halbachsen* a und b:



Ganz analog erhält man die folgende Übersicht, in der die Kurven zweiter Ordnung klassifiziert sind.

Typ	λ_1	λ_2	c	Gleichung	Kurventyp
1	>0	>0	<0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ellipse
1	>0	>0	$=0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Punkt $(0,0)$
1	>0	>0	>0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	leere Menge
1	>0	<0	<0	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hyperbel
1	>0	<0	$=0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Paar sich schneidender Geraden $y = \pm\frac{b}{a}x$
2	>0	$=0$	<0	$x^2 = a^2$	Paar paralleler Geraden $x = \pm a$
2	>0	$=0$	$=0$	$x^2 = 0$	y-Achse
2	>0	$=0$	>0	$x^2 + a^2 = 0$	leere Menge
3	$\neq 0$	$=0$		$x^2 = 2py$	Parabel

Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln entstehen beim Schnitt eines Kreiskegels mit einer Ebene. Diese Kurven heißen daher *Kegelschnitte*.

Wir verschaffen uns nun noch eine Übersicht über die Flächen zweiter Ordnung. Dazu bezeichnen wir die Veränderlichen z_1, z_2, z_3 mit x, y, z.

Typ	λ_1	λ_2	λ_3	c	Gleichung	Flächentyp
1	>0	>0	>0	<0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Ellipsoid
1	>0	>0	>0	$=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	Punkt $(0,0,0)$
1	>0	>0	>0	>0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	leere Menge
1	>0	>0	<0	<0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	einschaliges Hyperboloid
1	>0	>0	<0	$=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	elliptischer Doppelkegel
1	>0	>0	<0	>0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	zweischaliges Hyperboloid
2	>0	>0	$=0$	<0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	elliptischer Zylinder
2	>0	>0	$=0$	$=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	z-Achse
2	>0	>0	$=0$	>0	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	leere Menge
2	>0	<0	$=0$	<0	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	hyperbolischer Zylinder
2	>0	<0	$=0$	$=0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Paar sich schneidender Ebenen $y=\pm\frac{b}{a}x$
2	>0	$=0$	$=0$	<0	$x^2=a^2$	Paar paralleler Ebenen $x=\pm a$
2	>0	$=0$	$=0$	$=0$	$x^2=0$	yz-Ebene
2	>0	$=0$	$=0$	>0	$x^2=-a^2$	leere Menge
3	>0	>0	$=0$		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	elliptisches Paraboloid
3	>0	<0	$=0$		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	hyperbolisches Paraboloid
3	>0	$=0$	$=0$		$x^2=2pz$	parabolischer Zylinder.

Beispiel 7 Wir suchen die durch die Gleichung

$$5x_1^2+4x_1x_2+8x_2^2-32x_1-56x_2+80=0 \tag{11.29}$$

festgelegte Kurve. Dazu schreiben wir diese Gleichung als $\langle Ax,x\rangle+\langle b,x\rangle+c=0$ mit

$$A=\begin{pmatrix}5&2\\2&8\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-32\\-56\end{pmatrix},\quad c=80.$$

Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1=4$ und $\lambda_2=9$, und $w_1=(2,-1)^T$ sowie $w_2=(1,2)^T$ sind zugehörige Eigenvektoren. Wir normieren w_1 und w_2 und erhalten

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\quad v_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$, und sie erzeugen die orthogonale Matrix

$$C=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}.$$

Wir transformieren die Ausgangsgleichung, wobei A in $C^TAC = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ und b in $C^Tb = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -8 \\ -144 \end{pmatrix}$ übergeht:

$$4\,y_1^2 + 9\,y_2^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}\,y_1 - \frac{144}{\sqrt{5}}\,y_2 + 80 = 0.$$

Nun bestimmen wir die quadratischen Ergänzungen und erhalten

$$\begin{aligned} & 4\,y_1^2 + 9\,y_2^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}\,y_1 - \frac{144}{\sqrt{5}}\,y_2 + 80 = \\ = \;& 4\,(y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\,y_1) + 9\,(y_2^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}\,y_2) + 80 \\ = \;& 4\,(y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\,y_1 + \frac{1}{5}) + 9\,(y_2^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}\,y_2 + \frac{64}{5}) + 80 - \frac{4}{5} - \frac{576}{5} \\ = \;& 4\,(y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + 9\,(y_2 - \frac{8}{\sqrt{5}})^2 - 36 = 0. \end{aligned}$$

Mit $z_1 := y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $z_2 := y_2 - \frac{8}{\sqrt{5}}$ erhalten wir schließlich

$$4z_1^2 + 9z_2^2 - 36 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{4} = 1.$$

Die Lösungsmenge der Gleichung (11.29) ist also eine Ellipse mit den Halbachsen 3 und 2. Im z_1z_2-Koordinatensystem liegen diese Halbachsen parallel zu den Koordinatenachsen, und der Mittelpunkt der Ellipse ist der Nullpunkt $(0,0)$. Im y_1y_2-Koordinatensystem erscheint diese Ellipse parallelverschoben, so dass nun $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}})$ ihr Mittelpunkt ist. Schließlich entsteht hieraus das Bild der Ellipse im x_1x_2-Koordinatensystem durch Drehung um den Winkel φ mit dem Nullpunkt als Drehzentrum, wobei sich φ aus

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

ergibt (vgl. Abschnitt 8.2). ■

12 Folgen und Reihen von Funktionen

Wir wechseln nun das Thema und kehren zur Analysis zurück. Bisher haben wir Folgen und Reihen reeller Zahlen betrachtet. Wir dehnen unsere Untersuchungen nun auf Folgen und Reihen von Funktionen aus.

12.1 Punktweise Konvergenz

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, und für jede natürliche Zahl n sei eine Funktion $f_n : D \to \mathbb{R}$ gegeben. Man beachte, dass alle Funktionen f_n auf der gleichen Menge D definiert sind. Dann heißt $(f_n)_{n\geq 1}$ eine *Funktionenfolge* auf D. Ist $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Funktionenfolge, so heißt die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x), \quad x \in D,$$

eine *Funktionenreihe* auf D. Für diese Reihe schreibt man auch $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Natürlich können Funktionenreihen auch mit einem anderen Index als 1 beginnen.

Sei (f_n) eine Funktionenfolge. Für jedes feste $x \in D$ ist dann $\big(f_n(x)\big)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen. Diese Zahlenfolgen bzw. -reihen kann man auf Konvergenz untersuchen und wird dabei im Allgemeinen feststellen, dass für manche $x \in D$ Konvergenz vorliegt und für andere nicht.

Definition 12.1 a) *Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ heißt* punktweise konvergent auf D, *wenn für jedes $x \in D$ die Folge $\big(f_n(x)\big)_{n\geq 1}$ konvergiert. Ist die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ punktweise konvergent auf D, so heißt die Funktion*

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

die Grenzfunktion *der Funktionenfolge.*

b) *Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt* punktweise konvergent *auf D, wenn für jedes $x \in D$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert. Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ punktweise konvergent auf D, so heißt die Funktion*

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

die Summe *der Funktionenreihe.*

Wenn eine Funktionenfolge punktweise konvergiert, so ist die Grenzfunktion eindeutig bestimmt.

Beispiel 1 Sei $D = [0,1]$ und $f_n(x) = x^n$ für $n \geq 1$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ ist punktweise konvergent auf $[0,1]$, und für die Grenzfunktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [0,1) \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Beispiel 2 Sei $D = [0,1)$ und $f_n(x) = x^n$ für $n \geq 0$. Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ ist punktweise konvergent auf $[0,1)$, und für ihre Summe f: $[0,1) \to \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(geometrische Reihe). ∎

Man beachte, dass in Beispiel 1 alle Funktionen f_n stetig sind, die Grenzfunktion aber an der Stelle $x = 1$ unstetig ist. Das zeigt, dass sich Eigenschaften wie die Stetigkeit der Funktionen f_n im Allgemeinen nicht auf die Grenzfunktion übertragen oder vererben lassen. Dieses Ergebnis ist verständlich, wenn man beachtet, dass bei punktweiser Konvergenz jedes $x \in D$ für sich betrachtet wird, während bei der Stetigkeit das Verhalten der Funktion in einer Umgebung von x eine Rolle spielt. Wir lernen nun einen stärkeren Konvergenzbegriff kennen, der (u.a.) das Vererben der Stetigkeit von den Funktionen f_n auf die Grenzfunktion f garantiert.

12.2 Gleichmäßige Konvergenz

Noch einmal: Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert punktweise gegen die Grenzfunktion f, wenn für jedes $x \in D$ zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N = N(\varepsilon, x)$ existiert mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon, x).$$

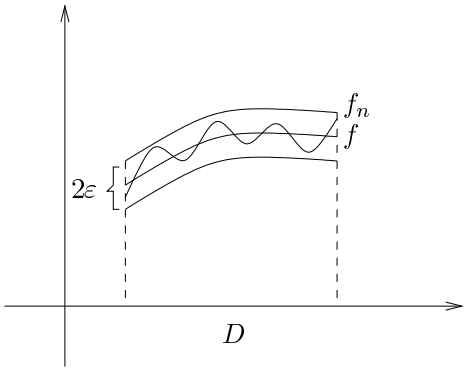
Die Zahl $N(\varepsilon, x)$ darf also von x abhängen. Bei der gleichmäßigen Konvergenz fordert man im Unterschied dazu, dass man die Zahl $N = N(\varepsilon)$ *unabhängig* von x wählen kann.

Definition 12.2 a) *Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ heißt* auf D gleichmäßig konvergent *mit der Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N = N(\varepsilon)$ existiert, so dass*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \textit{für alle } n \geq N(\varepsilon) \ \textit{ und für alle } x \in D. \tag{12.1}$$

b) *Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt auf D* gleichmäßig konvergent, *wenn die Folge ihrer Partialsummen auf D gleichmäßig konvergiert.*

Anschaulich bedeutet die Forderung (12.1), dass für $n \geq N(\varepsilon)$ der Graph der Funktion f_n in einem Streifen der Breite 2ε um dem Graphen von f liegt.



Offenbar folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz die punktweise Konvergenz, während die Umkehrung nicht gilt.

Beispiel 3 Wir zeigen, dass die Funktionenfolge aus Beispiel 1 nicht gleichmäßig konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in (0,1)$. Dann ist $f_n(x) = x^n$ und $f(x) = 0$. Wegen

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |x^n - 0| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x^n < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow\; n \ln x < \ln \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$$

kann es kein $N = N(\varepsilon)$ so geben, dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ *und alle* $x \in [0,1)$.

Beispiel 4 Betrachten wir die Funktionen $f_n(x) = x^n$ dagegen nur auf einem Intervall $[0,a]$ mit $a < 1$, so konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig. Das sehen wir ein wie in Beispiel 3. Wir müssen nämlich $N = N(\varepsilon)$ so wählen, dass

$$N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \quad \text{für alle } x \in [0,a]. \tag{12.2}$$

Nun ist für $x \in (0,a]$ und $\varepsilon < 1$ wegen

$$\ln x < \ln a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{\ln a}$$

klar, dass

$$\frac{\ln \varepsilon}{\ln x} < \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}\,.$$

Es genügt also, $N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}$ zu wählen, um (12.2) und damit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in (0,a]$ zu garantieren. (Für $x = 0$ ist ohnehin $f(x) = 0 = f_n(x)$ für alle n.) ∎

Die beiden folgenden Sätze geben Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz an.

Satz 12.3 *Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig auf D gegen f, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{12.3}$$

Dies ist im Wesentlichen eine Umformulierung der Definition. Für das nächste Kriterium führen wir einen neuen Begriff ein.

Definition 12.4 *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so heißt die Zahl*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)|$$

die Supremumsnorm von f.

Mit diesem Begriff hätten wir Satz 12.3 auch wie folgt formulieren können:

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig auf D gegen f, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Satz 12.5 *Sei (f_n) eine Funktionenfolge. Wenn die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_\infty$ konvergiert, dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig auf D.*

Dies ist das Analogon zur absoluten Konvergenz von Zahlenreihen, die wir in Abschnitt 2.4 kennen gelernt haben: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Satz 12.5 ist extrem nützlich, da man nur eine Reihe aus nichtnegativen Zahlen auf Konvergenz untersuchen muss und aus dieser Konvergenz die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenreihe erhält. Dabei ist es nicht unbedingt erforderlich, die Normen $\|f_n\|_\infty$ zu berechnen, um die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ zu überprüfen. Nach dem Majorantenkriterium genügt es, Zahlen $c_n \geq 0$ zu finden, dass

$$|f_n(x)| \leq c_n \quad \text{für alle } x$$

und dass die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty c_n$ konvergiert.

Beispiel 5 Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^2}$ ist auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent. Es ist nämlich

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergiert. ∎

Die folgenden Sätze zeigen, dass bei gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen Eigenschaften wie die Stetigkeit, die Integrierbarkeit und – mit Einschränkungen – die Differenzierbarkeit der Funktionen f_n auf die Grenzfunktion vererbt werden.

Satz 12.6 *Die Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ seien stetig auf D. Dann gilt:*

a) *Ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig konvergent auf D mit der Grenzfunktion f, so ist auch f auf D stetig.*

b) *Ist die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent auf D mit der Summe g, so ist auch g auf D stetig.*

Satz 12.7 *Die Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:*

a) *Ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$ mit der Grenzfunktion f, so ist auch f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx. \tag{12.4}$$

b) *Ist die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$ mit der Summe g, so ist g auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx. \tag{12.5}$$

Diese Sätze treffen Aussagen über das Vertauschen von Grenzprozessen wie etwa der Grenzwertbildung oder der Summation mit der Integration. Ohne die Eigenschaft der gleichmäßigen Konvergenz ist das Vertauschen von Grenzwertbildung und Integration im Allgemeinen nicht erlaubt. Das zeigen die Funktionen

$$f_n(x) = 2nxe^{-nx^2} \quad \text{auf } [0,1].$$

Die Folge (f_n) konvergiert nämlich punktweise auf $[0,1]$ gegen die Funktion $f = 0$. Demnach ist

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 2nxe^{-nx^2}\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} -e^{-nx^2}\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n}) = 1. \end{aligned}$$

■

Beispiel 6 Für $0 < a < 1$ konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ auf $[0,a]$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $g(x) = \frac{1}{1-x}$, da sie nach Beispiel 2 punktweise gegen diese Funktion konvergiert und da $|x^n| \leq a^n$ für alle $x \in [0,a]$, wobei die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ konvergiert.

Nun ist

$$\int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = \int_0^a \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln(1-x)\Big|_0^a = -\ln(1-a)$$

sowie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}\,.$$

Nach Satz 12.7 ist daher

$$\ln(1-a) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \quad \text{für } 0 \le a < 1.$$

Dies gilt sogar für alle a mit $|a| < 1$. ∎

Etwas verwickelter ist die Situation beim Vertauschen von Differentiation und Grenzwertbildung. Hier benötigt man neben der Konvergenz der Folge (f_n) die gleichmäßige Konvergenz der Folge (f_n') der Ableitungen.

Satz 12.8 *Die Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ seien auf dem Intervall I differenzierbar. Dann gilt:*

a) *Ist die Folge (f_n) punktweise konvergent auf I mit der Grenzfunktion f und ist die Folge (f_n') der Ableitungen gleichmäßig konvergent auf I, so ist f auf I differenzierbar, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big)' = f'(x). \tag{12.6}$$

b) *Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ punktweise konvergent auf I mit der Summe g, und konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ der Ableitungen gleichmäßig auf I, so ist g auf I differenzierbar, und es gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)' = g'(x). \tag{12.7}$$

Die gleichmäßige Konvergenz der Folge (f_n) allein reicht jedoch nicht aus, um Grenzübergang und Differentiation vertauschen zu können, wie folgendes Beispiel zeigt. Die Folge $(f_n)_{n\ge1}$ der durch

$$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$$

definierten Funktionen f_n konvergiert auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion $f = 0$ (denn es ist ja $\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty < \frac{1}{n}$). Demnach ist

$$\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big)' = f'(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Andererseits ist

$$f_n'(x) = n\cos(n^2 x),$$

und die Folge (f_n') divergiert z.B. an der Stelle $x = 0$. ∎

12.3 Potenzreihen

Wir kommen nun zu einer wichtigen Klasse von Funktionenreihen, die wegen ihrer speziellen Gestalt Potenzreihen genannt werden.

Definition 12.9 *Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Funktionenreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

eine Potenzreihe *um den* Entwicklungspunkt x_0*, und die a_n heißen die* Koeffizienten *der Potenzreihe.*

Uns interessiert zunächst das Konvergenzverhalten von Potenzreihen. Wir wissen bereits, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (Exponentialreihe) für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Ihre Summe haben wir e^x genannt. Dagegen konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (geometrische Reihe) für $|x| < 1$, während sie für $|x| \geq 1$ divergiert.

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe um x_0, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $z = x - x_0$ eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt 0. Wir werden daher im Weiteren meist $x_0 = 0$ wählen.

Satz 12.10 a) *Konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für ein $\overline{x} \neq 0$, so konvergiert sie für alle x mit $|x| < |\overline{x}|$ absolut.*

b) *Divergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für ein $\overline{x}$, so divergiert sie für alle x mit $|x| > |\overline{x}|$.*

Beweis (a) Aus der Konvergenz an der Stelle $\overline{x}$ und dem notwendigen Konvergenzkriterium folgt die Beschränktheit der Folge $(a_n \overline{x}^n)$. Es gibt also ein $M \geq 0$ so, dass $|a_n \overline{x}^n| \leq M$ für alle $n \geq 0$.

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < |\overline{x}|$. Wir schreiben x als $\lambda \overline{x}$ mit $|\lambda| < 1$. Wegen

$$|a_n x^n| = |a_n \lambda^n \overline{x}^n| = |\lambda^n| \, |a_n \overline{x}^n| \leq M |\lambda|^n$$

ist die Reihe $M \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Nach dem Vergleichskriterium konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut.

(b) Wir beweisen diese Aussage indirekt. Würde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für ein x mit $|x| > |\overline{x}|$ konvergieren, so würde nach Teil (a) die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an der Stelle $\overline{x}$ konvergieren. Widerspruch. ∎

Für jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ trifft daher genau eine der folgenden Aussagen zu:

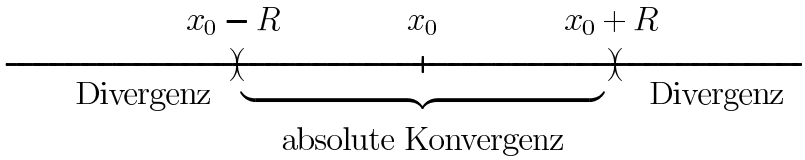
(A1) Die Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$.

(A2) Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

(A3) Es gibt eine Zahl $R > 0$ so, dass die Reihe für $|x| < R$ konvergiert und für $|x| > R$ divergiert.

Die Zahl R aus (A3) ist eindeutig bestimmt und heißt der *Konvergenzradius* der Reihe. Im Fall (A1) setzt man auch $R := 0$ und im Fall (A2) schreibt man formal $R = \infty$. Im Fall (A3) kann man für $x = R$ und $x = -R$ i.Allg. keine Aussage treffen. Fassen wir zusammen.

Satz 12.11 *Für jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ gibt es ein Intervall $I_R = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq R\}$ mit folgender Eigenschaft: Liegt x im Inneren von I_R, d.h. ist $|x - x_0| < R$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ absolut. Liegt x außerhalb von I_R, d.h. ist $|x - x_0| > R$, so liegt Divergenz vor.*



Dieser Satz bleibt auch für komplexe Potenzreihen richtig, wenn man das Interval I_R durch die Kreisscheibe um x_0 mit dem Radius R ersetzt. Der Konvergenzradius kann wie folgt aus den Koeffizienten der Potenzreihen bestimmt werden.

Satz 12.12 (Formel von Cauchy-Hadamard, Wurzelkriterium) *Wenn der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert, so ist*

$$R = \Big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Big)^{-1} \tag{12.8}$$

mit der Vereinbarung, dass $R = \infty$, falls $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, und dass $R = 0$, falls $\sqrt[n]{|a_n|} \to \infty$.

Dieser Satz gilt ohne die Voraussetzung der Existenz des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, wenn man in (12.8) den Limes durch den Limes superior ersetzt. Der *Limes superior* $\limsup_{n\to\infty} b_n$ einer Zahlenfolge (b_n) ist der größte Grenzwert, den eine Teilfolge von (b_n) haben kann.

Beweis Sei $0 < \lim \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

liefert das Wurzelkriterium, dass für $|x| < \Big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Big)^{-1}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut konvergiert und für $|x| > \Big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Big)^{-1}$ divergiert. Also stimmen in diesem Fall $\Big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Big)^{-1}$ und der Konvergenzradius der Reihe überein. Die Fälle $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \{0, \infty\}$ behandelt man ähnlich. ∎

Satz 12.13 (Quotientenkriterium) *Gilt $a_n \neq 0$ für alle hinreichend großen n und existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, so ist*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{12.9}$$

mit der Vereinbarung, dass $R = \infty$ falls $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to \infty$.

Beispiel 7

a) In der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ist $a_n = \frac{1}{n} > 0$, und der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

existiert. Also ist $R = 1$.

b) In der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot 2^n x^n$ ist $a_n = n^2 \cdot 2^n$, und der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \cdot 2 = 2$$

existiert. Also ist $R = 1/2$.

c) Für die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ ist $a_n = \frac{1}{n!}$ bzw. $a_n = n!$.

Im ersten Fall ist

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

und im zweiten Fall

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, während die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ nur für $x = 0$ konvergiert. ∎

Wir kommen zum Rechnen mit Potenzreihen.

Satz 12.14 *Haben die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ die Konvergenzradien $R_a, R_b > 0$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \min(R_a, R_b)$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n \tag{12.10}$$

sowie

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{12.11}$$

mit $c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n$.

Potenzreihen können also auf einem gemeinsamen Konvergenzintervall gliedweise addiert und subtrahiert werden, und die Multiplikation erfolgt nach dem Cauchyprodukt. Der Konvergenzradius der entstehenden Reihen ist mindestens gleich $\min(R_a, R_b)$.

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$, so wird durch $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Funktion f auf $(-R, R)$ festgelegt. Einige Eigenschaften von f werden im folgenden Satz beschrieben.

Satz 12.15 *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $(-R, R)$. Dann gilt*

a) *Die Funktion f ist stetig auf $(-R, R)$.*

b) *Die Funktion f ist differenzierbar auf $(-R, R)$, und es ist*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}.$$

Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$ hat wieder den Konvergenzradius R.

c) *Die Funktion f ist Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[a, b] \subseteq (-R, R)$, und es ist*

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} \quad \text{für } x \in (-R, R).$$

Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^n$ hat wieder den Konvergenzradius R.

Aussage (a) bedeutet, dass für jedes $\overline{x} \in (-R, R)$ gilt

$$\lim_{x \to \overline{x}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \to \overline{x}} f(x) = f(\overline{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{x}^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big(\lim_{x \to \overline{x}} x \big)^n.$$

Man darf unter den Voraussetzungen des Satzes also die Grenzprozesse $\lim_{x \to \overline{x}}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}$ miteinander vertauschen.

Die Aussagen (b) und (c) besagen, dass man Potenzreihen gliedweise differenzieren und integrieren kann. Insbesondere ist

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$$

eine Stammfunktion von $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf $(-R, R)$.

Die Tatsache, dass der Konvergenzradius der gliedweise abgeleiteten bzw. integrierten Reihen gleich dem der Ausgangsreihe ist, folgt leicht aus der Formel von Cauchy/Hadamard und aus dem Grenzwert $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Eine bemerkenswerte Konsequenz dieser Tatsache ist, dass *Potenzreihen unendlich oft differenziert werden können.* Dabei ist für $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} \tag{12.12}$$

für $x \in (-R, R)$ und $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel 8

a) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hat den Konvergenzradius 1, und ihre Summe ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x \in (-1, 1).$$

Differenzieren wir diese Identität k-mal, so folgt

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}},$$

also

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}. \tag{12.13}$$

b) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ hat den Konvergenzradius 1 und die Summe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{auf } (-1, 1).$$

Gliedweise Integration liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan x,$$

also

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{für } x \in (-1, 1). \tag{12.14}$$

c) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ hat den Konvergenzradius 1 und die Summe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad \text{auf } (-1, 1).$$

Gliedweises Integrieren ergibt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, x^{n+1} = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \ln(1+t),$$

also

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, x^{n+1} \quad \text{für } x \in (-1,1). \tag{12.15}$$

■

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit $R > 0$ und f ihre Summe auf dem Intervall $(x_0-R,\, x_0+R)$. Dann ist f unendlich oft differenzierbar, und aus (12.12) folgt für $x = x_0$

$$f^{(k)}(x_0) = k(k-1)\ldots 1 \cdot a_k$$

bzw.

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, \tag{12.16}$$

wobei wir vereinbaren, dass $f^{(0)} = f$. Es ist also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, (x-x_0)^n \quad \text{auf } (x_0 - R,\, x_0 + R).$$

Dies legt es nahe, jeder auf einem Intervall $(x_0 - R,\, x_0 + R)$ unendlich oft differenzierbaren Funktion f ihre *Taylorreihe um den Entwicklungspunkt* x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, (x-x_0)^n \tag{12.17}$$

zuzuordnen. Wir starten hier also nicht mit einer konvergenten Potenzreihe, der wir ihre (unendlich oft differenzierbare) Summe zuordnen, sondern ordnen einer unendlich oft differenzierbaren Funktion formal die Reihe (12.17) zu. Dabei ist zunächst unklar, ob diese Reihe für $x \neq x_0$ überhaupt konvergiert und ob im Falle der Konvergenz ihre Summe an der Stelle x mit $f(x)$ zusammenfällt. Ein warnendes Beispiel liefert die auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass alle Ableitungen dieser Funktion an der Stelle 0 gleich 0 sind. Die Taylorreihe von f um den Nullpunkt konvergiert also gegen die Nullfunktion auf R, während $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$.

Da die n-te Partialsumme der Taylorreihe (12.17) gerade das Taylorpolynom $T_n(x, x_0)$ von f ist, ist klar, dass die Taylorreihe von f genau dann gegen die

Funktion f konvergiert, wenn das Restglied $R_n(x, x_0)$ aus dem Taylorschen Satz (Satz 4.14) gegen 0 konvergiert, wenn n gegen Unendlich strebt. Zur Erinnerung: Ist f beliebig oft differenzierbar, so ist

$$T_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

und

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{mit } \xi \in (x_0, x)$$

ist das *Restglied nach Lagrange*. Für das Restglied gibt es zahlreiche weitere Darstellungsmöglichkeiten. So heißt

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

das *Restglied in Integralform*.

Beispiel 9 Die Sinusfunktion ist auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Ihre Taylorreihe um den Entwicklungspunkt 0 lautet

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots . \tag{12.18}$$

Das Restglied $R_n(x, 0)$ haben wir bereits in Abschnitt 4.4.4 abgeschätzt:

$$|R_n(x, 0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Also konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe (12.18) der Sinusfunktion gegen $\sin x$. Man sagt auch, dass die Reihe (12.18) die Sinusfunktion darstellt. ∎

In der folgenden Übersicht sind die Taylorreihen einiger Funktionen zusammengestellt:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\
\sinh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\
\cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n && \text{für } x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n && \text{für } x \in (-1,1],\\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} && \text{für } x \in (-1,1),\\
\arcsin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} && \text{für } x \in (-1,1),\\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n && \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } x \in (-1,1).
\end{aligned}
$$

In den letzten beiden Identitäten ist

$$
\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\,.
$$

Für $\alpha \in \mathbb{N}$ bricht im letzten Beispiel die Summation an der Stelle $n = \alpha$ ab, d.h. man erhält ein (endliches) Polynom statt einer Potenzreihe. Dies ist gerade die Aussage des Binomischen Satzes, der natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die Potenzreihendarstellung für $\ln(1+x)$ liefert für $x = 1$ beispielsweise

$$
\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots\,.
$$

Wie beenden diesen Abschnitt mit einem weiteren nützlichen Resultat über Potenzreihen.

Satz 12.16 (Identitätssatz für Potenzreihen) *Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ zwei Potenzreihendarstellungen, die beide auf $(x_0-R,\, x_0+R)$ mit $R>0$ konvergieren und deren Summen auf $(x_0-R,\, x_0+R)$ übereinstimmen, so ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.*

Dies ist eine Verallgemeinerung des Identitätssatzes für Polynome. Der Beweis folgt leicht aus Formel (12.16). Dieser Identitätssatz ist Grundlage der Methode des *Koeffizientenvergleichs*. Wir sehen uns diese Methode an am Beispiel des unbestimmten Ansatzes für den Quotienten zweier Potenzreihen. Grundlage dafür ist der folgende Satz.

Satz 12.17 *Sind $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ Potenzreihen, die beide für $|x| < R$ mit $R > 0$ konvergieren, und ist $g(0) = b_0 \neq 0$, so läßt sich der Quotient f/g in eine Potenzreihe um 0 mit positivem Konvergenzradius entwickeln.*

Der Beweis folgt am einfachsten mit Mitteln der komplexen Funktionentheorie, die wir im dritten Semester kennen lernen. Nach Satz 12.17 ist also

$$
\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,
$$

wobei alle Reihen für $|x| < r$ mit einem $r > 0$ konvergieren. Unter Verwendung des Cauchy-Produkts erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\Big) =: \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

mit

$$d_n = b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_n c_0.$$

Koeffizientenvergleich ergibt $a_n = d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also

$$\begin{aligned}
\text{bei } x^0: \quad a_0 &= b_0 c_0, \\
\text{bei } x^1: \quad a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0, \\
\text{bei } x^2: \quad a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

und hieraus lassen sich wegen $b_0 \neq 0$ die $c_0, c_1, c_2, \ldots$, sukzessive berechnen. Als Beispiel bestimmen wir die ersten Koeffizienten der Taylorreihenentwicklung von $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} =: \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Aus den bekannten Taylorentwicklungen der Sinus- und Kosinusfunktion folgt

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\Big)\big(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\big),$$

und Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned}
\text{bei } x^0: \quad 0 &= 1 \cdot c_0 && \Rightarrow \quad c_0 = 0 \\
\text{bei } x^1: \quad 1 &= 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 && \Rightarrow \quad c_1 = 1 \\
\text{bei } x^2: \quad 0 &= 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_1 + \tfrac{1}{2} \cdot c_0 && \Rightarrow \quad c_2 = 0 \\
\text{bei } x^3: \quad -\tfrac{1}{6} &= 1 \cdot c_3 + 0 \cdot c_2 - \tfrac{1}{2} \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 && \Rightarrow \quad c_3 = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

usw. Fortsetzung dieses Vorgehens liefert

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \ldots \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}\,.$$

12.4 Fourierreihen

Nach den Potenzreihen betrachten wir nun eine weitere Klasse spezieller Funktionenreihen, die von zentraler Bedeutung für die Beschreibung periodischer Vorgänge in Natur und Technik ist: die Fourierreihen. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzintervalls beliebig oft differenzierbar sind. Es können daher nur „wenige“ sehr glatte Funktionen durch eine Potenzreihe dargestellt werden. Demgegenüber lassen sich durch

Fourierreihen z.B. auch periodische Funktionen darstellen, die nur stückweise differenzierbar sind und deren Ableitungen Sprünge aufweisen.

Eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion f heißt *periodisch mit der Periode* $T > 0$, wenn

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispielsweise sind $\sin x$ und $\cos x$ periodische Funktionen mit den Perioden $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$, und 2π ist die kleinste Periode dieser Funktionen. Dagegen ist für die konstante Funktion $f(x) = 1$ jede positive Zahl eine Periode, so dass es für diese Funktion keine kleinste Periode gibt.

Durch eine Variablensubstitution kann man jede Funktion mit der Periode T auf eine Funktion mit der Periode 2π zurückführen. Hat etwa f die Periode T, so hat die Funktion $F(x) := f\big(\frac{T}{2\pi}x\big)$ die Periode 2π:

$$F(x+2\pi) = f\big(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\big) = f\big(\frac{T}{2\pi}x + T\big) = f\big(\frac{T}{2\pi}x\big) = F(x)\,.$$

Wir betrachten daher meist nur 2π-periodische Funktionen.

Eine *trigonometrische Reihe* ist eine Reihe der Gestalt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{12.19}$$

mit reellen Koeffizienten a_n $(n \geq 0)$ und b_n $(n \geq 1)$. Es wird sich später zeigen, dass es praktisch ist, nicht a_0 sondern $\frac{a_0}{2}$ also Koeffizienten von $\cos 0x = 1$ zu wählen.

Satz 12.18 *Wenn jede der Reihen* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *absolut konvergiert, so konvergiert die trigonometrische Reihe* (12.19) *auf ganz* $\mathbb{R}$ *gleichmäßig.*

Für das Weitere stellen wir zunächst einige Integralidentitäten für trigonometrische Funktionen zusammen.

Orthogonalitätsbeziehungen Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos mt\, \cos nt\, dt &= 0 \quad \text{für } m \neq n,\\
\int_0^{2\pi} \sin mt\, \sin nt\, dt &= 0 \quad \text{für } m \neq n,\\
\int_0^{2\pi} \cos mt\, \sin nt\, dt &= 0.
\end{aligned}$$

Normierungsbeziehungen Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^2 nt\, dt &= \begin{cases} \pi & \text{für } n \geq 1 \\ 2\pi & \text{für } n = 0, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 nt\, dt &= \begin{cases} \pi & \text{für } n \geq 1 \\ 0 & \text{für } n = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Die Bezeichnungen „Orthogonalitäts-“ bzw. „Normierungsbedingungen“ rühren daher, dass man in völliger Analogie zum Skalarprodukt bzw. zur Norm von Vektoren

$$\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad \text{bzw.} \quad \|a\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\Big)^{1/2}$$

auch ein Skalarprodukt bzw. eine Norm für Riemann-integrierbare Funktionen f, g auf $[0, 2\pi]$ einführen kann:

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \quad \text{bzw.} \quad \|f\| := \Big(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Die angegebenen Beziehungen lassen sich leicht nachrechnen mit Formeln wie

$$\cos\alpha\, \cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\big).$$

Mit den Orthogonalitäts- und Normierungsbeziehungen läßt sich leicht ein Zusammenhang herstellen zwischen den Werten einer trigonometrischen Reihe und ihren Koeffizienten a_n und b_n.

Satz 12.19 (Euler/Fourier) *Die Reihe f aus* (12.19) *sei auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent. Dann gilt*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}_0, \tag{12.20}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}. \tag{12.21}$$

Beweis Wir multiplizieren (12.19) mit $\cos nx$:

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx\, \cos nx + b_m \sin mx\, \cos nx)$$

und integrieren über $[0, 2\pi]$. Da die Reihe (12.19) gleichmäßig konvergiert, konvergiert auch die Reihe $f(x)\cos nx$ gleichmäßig, und wir dürfen Summation und

Integration vertauschen:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\Big(a_m\int_0^{2\pi}\cos mx\,\cos nx\,dx + b_m\int_0^{2\pi}\sin mx\,\cos nx\,dx\Big).$$

Mit den Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen erhält man hieraus sofort (12.20), und (12.21) erhält man analog durch Multiplikation von (12.19) mit $\sin nx$. ∎

Die Zahlen a_n und b_n aus (12.20) und (12.21) kann man für jede 2π-periodische und auf $[0,2\pi]$ Riemann-integrierbare Funktion f berechnen. Sie heißen die *Fourierkoeffizienten* von f. Mit diesen Koeffizienten kann man der Funktion f *formal* die trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

zuordnen, die die *Fourierreihe* von f heißt (ganz ähnlich haben wir im vorigen Abschnitt jeder unendlich oft differenzierbaren Funktion formal eine Potenzreihe – die Taylorreihe der Funktion – zugeordnet). Unklar ist im Moment, ob die einer Funktion f zugeordnete Fourierreihe überhaupt konvergiert und ob ihre Summe im Falle der Konvergenz gleich f ist.

Bevor wir uns Beispiele ansehen, vermerken wir noch drei einfache Regeln, die das Berechnen der Fourierkoeffizienten mitunter vereinfachen.

(A) Ist f 2π-periodisch und auf einem Intervall der Länge 2π Riemann-integrierbar, so ist f auf jedem Intervall der Länge 2π Riemann-integrierbar, und es gilt für alle $a\in\mathbb{R}$

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_a^{a+2\pi} f(x)dx.$$

(B) Ist f eine gerade Funktion, d.h. $f(x)=f(-x)$ für $x\in\mathbb{R}$, dann ist

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{für } n\in\mathbb{N}_0$$

sowie $b_n=0$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

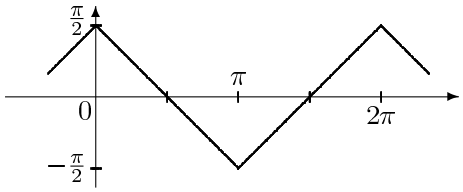
(C) Ist f eine ungerade Funktion, d.h. $f(x)=-f(-x)$ für $x\in\mathbb{R}$, so ist

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad \text{für } n\in\mathbb{N}$$

sowie $a_n=0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$.

Beispiel 10 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} -x + \dfrac{\pi}{2} & \text{für } x \in [0, \pi) \\ x - \dfrac{3}{2}\pi & \text{für } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$



(„Sägezahnfunktion“). Da f gerade ist, ist $b_n = 0$ für alle n. Für die a_n erhält man

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Big(-x + \frac{\pi}{2}\Big) \cos nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Also ist $a_0 = 0$, und mit partieller Integration folgt für $n \geq 1$

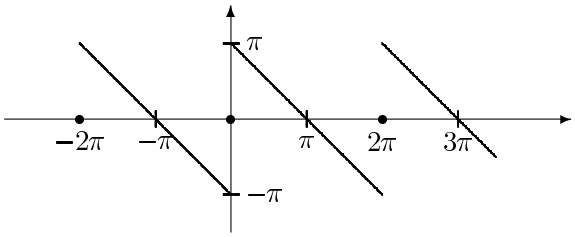
$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} \left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die durch die Sägezahnfunktion f definierte Fourierreihe ist also

$$\frac{4}{\pi}\Big(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\Big).$$

Diese Fourierreihe ist gleichmäßig konvergent. Unklar ist im Moment, ob ihre Summe gleich f ist. ■

Beispiel 11 Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit $g(0) = 0$ und $g(x) = \pi - x$ für $0 < x < 2\pi$.



Da f ungerade ist, sind alle a_n gleich 0, während für $n \geq 1$ gilt

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \sin nx \, dx = \frac{2}{n}.$$

Die durch g definierte Fourierreihe ist also

$$2\Big(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots\Big) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Hier ist selbst die Konvergenz der Reihe auf den ersten Blick unklar. ■

Wir wenden uns nun den z.T. recht schwierigen Konvergenzfragen zu. Einfache Überlegungen zeigen, dass in der Regel nicht einmal punktweise Konvergenz vorliegen kann: Zwei Funktionen, die sich nur in endlich vielen Punkten unterscheiden, besitzen die gleiche Fourierreihe. Es gibt sogar Beispiele stetiger Funktionen, deren Fourierreihe nicht in jedem Punkt konvergiert.

Um Konvergenzbedingungen formulieren zu können, führen wir die folgenden Begriffe ein. Für eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt $x_0 \in (a, b)$ eine *Sprungstelle*, wenn der links- und der rechtseitige Grenzwert

$$f(x_0-) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_0+) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$$

existieren und wenn $f(x_0-) \neq f(x_0+)$. Die Zahl $f(x_0+) - f(x_0-)$ heißt auch der *Sprung* von f an der Stelle x_0. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig* auf $[a, b]$, wenn es eine Zerlegung $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ von $[a, b]$ mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ so gibt, dass f auf allen offenen Intervallen (x_{i-1}, x_i) mit $i = 1, \ldots, m$ stetig ist und dass die linksseitigen Grenzwerte $f(x_i-)$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und die rechtsseitigen Grenzwerte $f(x_i+)$ für alle $i = 0, \ldots, m-1$ existieren. Die Funktionswerte $f(x_i)$ sind dabei offenbar irrelevant. Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt auf $[a, b]$ *stückweise glatt* oder *stückweise stetig differenzierbar*, wenn ihre Ableitung stückweise stetig ist, d.h. man verlangt, dass es eine solche Zerlegung $\{x_0, \ldots, x_m\}$ gibt, dass f auf jedem Intervall (x_{i-1}, x_i) stetig differenzierbar ist und dass alle links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte $f'(x_i-)$ und $f'(x_i+)$ existieren. An den Punkten x_i braucht die Ableitung von f nicht zu existieren. Eine stückweise glatte Funktion hat höchstens endlich viele Sprungstellen.

Satz 12.20 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch und stückweise glatt auf $[0, 2\pi]$. Dann konvergiert die Fourierreihe von f für jedes $x \in \mathbb{R}$, und es gilt*

$$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist f stückweise glatt auf $[0, 2\pi]$ und stetig in x, so ist sogar

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Schließlich konvergiert auf jedem abgeschlossenen Intervall, auf dem f stückweise glatt und stetig ist, die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f.

In Beispiel 10 ist f stückweise glatt und stetig auf $\mathbb{R}$. Daher ist

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\,.$$

Für $x = 0$ erhalten wir insbesondere $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, d.h.

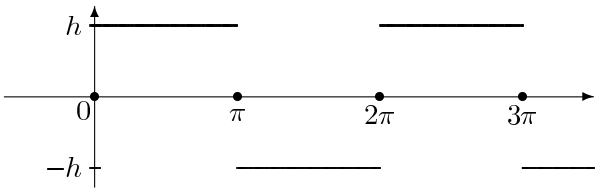
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,. \tag{12.22}$$

Für Beispiel 11 liefert Satz 12.20 ebenfalls punktweise Konvergenz der Fourierreihe von g gegen g auf ganz $\mathbb{R}$. Man beachte, dass $g(0) = \frac{g(0-)+g(0+)}{2}$.

Beispiel 12 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } x = \pi \\ h & \text{für } x \in (0, \pi) \\ -h & \text{für } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

mit einem $h > 0$.



Da f ungerade ist, ist $a_n = 0$ für alle n, und man rechnet leicht nach, dass

$$b_n = \begin{cases} \frac{4h}{\pi n} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Da f stückweise glatt ist, konvergiert die Fourierreihe

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\big((2n+1)\pi\big)}{2n+1}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen $\frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big) = f(x)$. Man kann beobachten, dass für jedes m die Partialsummen

$$s_{2m+1}(x) := \frac{4h}{\pi} \sum_{n=0}^{m} \frac{\sin\big((2n+1)\pi\big)}{2n+1}$$

dieser Fourierreihe über die halbe Sprunghöhe hinausschießen (vgl. die Skizze im Arbeitsbuch S. 302). Diese Erscheinung heißt *Gibbs'sches Phänomen.* ■

Anmerkung 12.21 Ist f periodisch mit der Periode $T > 0$, so lautet die zugehörige Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos\big(\frac{2\pi}{T}\, nx\big) + b_n \sin\big(\frac{2\pi}{T}\, nx\big) \Big)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\big(\frac{2\pi}{T}\,nx\big)dx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\big(\frac{2\pi}{T}\,nx\big)dx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

Anmerkung 12.22 Unter Benutzung der Eulerschen Formel $e^{it} = \cos t + i \sin t$ für $t \in \mathbb{R}$ definieren wir für $n \in \mathbb{Z}$ das komplexe Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Die Fourierreihe einer stückweise glatten 2π-periodischen Funktion f auf $\mathbb{R}$ läßt sich dann in der *komplexen Form*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{12.23}$$

mit den *komplexen Fourierkoeffizienten*

$$c_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n \in \mathbb{Z},$$

schreiben. Dabei versteht man unter der Summe der Reihe (12.23) den Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

■

13 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

13.1 Mengen im $\mathbb{R}^n$

Wir bezeichnen wieder mit $\mathbb{R}^n$ den linearen Raum aller Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit reellen Einträgen und den früher eingeführten Operationen. Die Vektoren im $\mathbb{R}^n$ schreiben wir meist zeilenweise. Je zwei Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ist ihr Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

zugeordnet und jedem Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ seine Norm

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Dabei ist $\|x\| = 0$ genau dann, wenn x der Nullvektor $0 = (0, \ldots, 0)$ ist. Weiter ist $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, und es gilt die *Dreiecksungleichung*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Schließlich erinnern wir noch an die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wir führen nun einige Begriffe ein, die die Lage eines Punktes in Bezug auf eine Teilmenge M von $\mathbb{R}^n$ beschreiben.

Definition 13.1 *Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Dann heißt*

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \, \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

die ε-Umgebung von x_0. *Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$, die für ein $\varepsilon > 0$ eine komplette ε-Umgebung von x_0 enthält, heißt eine* Umgebung *von x_0.*

Im $\mathbb{R}^1$ ist $U_\varepsilon(x_0)$ das offene Intervall $(x_0 - \varepsilon, \, x_0 + \varepsilon)$, im $\mathbb{R}^2$ die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius ε ohne ihren Rand, und im $\mathbb{R}^3$ die Kugel mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius ε, ebenfalls ohne ihren Rand.

Definition 13.2 a) *Ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt* innerer Punkt *der Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn es eine ε–Umgebung von x_0 gib, die ganz in M liegt. Die Menge aller inneren Punkte von M heißt das* Innere *von M. Bezeichnung:* $\operatorname{int} M$ *oder* $\underline{M}$.

b) *Ein* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *heißt* Randpunkt *der Menge* $M \subseteq \mathbb{R}^n$*, wenn es in jeder* ε*-Umgebung von* x_0 *mindestens einen Punkt aus* M *und mindestens einen Punkt, der nicht zu* M *gehört, gibt. Die Menge aller Randpunkte von* M *heißt der* Rand *von* M*. Bezeichnung:* ∂M*.*

c) *Für jede Menge* M *heißt* $M \cup \partial M$ *die* Abschließung *oder* abgeschlossene Hülle *von* M*. Bezeichnung:* $\overline{M}$ *oder* $\operatorname{clos} M$*.*

Definition 13.3 *Die Menge* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *heißt*

a) offen*, wenn jeder Punkt von* M *ein innerer Punkt ist.*

b) abgeschlossen*, wenn jeder Randpunkt von* M *zu* M *gehört.*

c) beschränkt*, wenn es ein* $R > 0$ *gibt mit* $M \subseteq U_R(0)$*.*

d) kompakt*, wenn* M *abgeschlossen und beschränkt ist.*

Eine Menge M ist genau dann offen (abgeschlossen), wenn $M = \operatorname{int} M$ ($M = \operatorname{clos} M$). Der Rand ∂M und die Abschließung $M \cup \partial M$ einer Menge M sind stets abgeschlossen, und ihr Inneres $\operatorname{int} M$ ist stets offen. Weiter ist $\operatorname{int} M \cap \partial M = \emptyset$. Die Mengen $\mathbb{R}^n$ und $\emptyset$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen. Schließlich ist eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann offen (abgeschlossen), wenn ihr Komplement $\mathbb{R}^n \backslash M$ abgeschlossen (offen) ist. Man kann auch leicht zeigen, dass der Durchschnitt und die Vereinigung jeweils *endlich* vieler offener (abgeschlossener) Mengen wieder offen (abgeschlossen) ist.

Beispiele Die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0\}$ ist abgeschlossen, jedoch nicht beschränkt, und somit nicht kompakt. Die Menge $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 < \varepsilon^2\} = U_\varepsilon(0)$ ist offen und beschränkt. Ihr Rand ist die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 = \varepsilon^2\}$. Also ist M nicht abgeschlossen. Die Abschließung von M ist

$$\operatorname{clos} M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq \varepsilon^2\},$$

und diese Menge ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Schließlich ist $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a < x_1 < b,\, c \leq x_2 \leq d\}$ eine Menge, die weder offen noch abgeschlossen ist. ∎

13.2 Grenzwerte und Stetigkeit

Ordnet man jeder Zahl $k \in N$ einen Punkt $x_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$ zu, so entsteht eine *Folge* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$. Völlig analog zu reellen Folgen trifft man die folgende Definition.

Definition 13.4 *Eine Folge* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *im* $\mathbb{R}^n$ *heißt* konvergent*, wenn es ein* $x \in \mathbb{R}^n$ *mit folgender Eigenschaft gibt: Für jedes* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *so,*

dass $\|x_k - x\| < \varepsilon$ *für alle* $k \geq N$. *In diesem Fall ist* x *eindeutig bestimmt und heißt* Grenzwert *der Folge* (x_k). *Bezeichnung:*

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k \quad \textit{oder} \quad x_k \to x \quad \textit{für } k \to \infty.$$

Satz 13.5 *Eine Folge* (x_k) *im* $\mathbb{R}^n$ *mit* $x_k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ *ist genau dann konvergent und hat den Grenzwert* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, *wenn für jedes* $i = 1, \ldots, n$ *die Folge* $(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *der* i*-ten Komponenten konvergiert und ihr Grenzwert gleich* x_i *ist.*

Um die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Vektoren auf Konvergenz zu untersuchen, muss man also jede der n Zahlenfolgen $(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $i = 1, \ldots, n$, auf Konvergenz untersuchen. Dazu lassen sich die in Abschnitt 2 festgehaltenen Konvergenzaussagen für Zahlenfolgen heranziehen. Beispielsweise ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n},\ \sqrt[n]{n},\ \frac{\sin n}{n}\right) = (1, 1, 0),$$

da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0. \qquad \blacksquare$$

Sei D eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Eine Vorschrift f, die jedem $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ genau eine reelle Zahl $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ zuordnet, heißt eine *reelle Funktion der* n *reellen Veränderlichen* $x_1, \ldots, x_n$. Zumindest für $n = 2$ läßt sich der *Graph* von $f : D \to \mathbb{R}$, d.h. die Menge

$$\{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 :\ (x_1, x_2) \in D,\ y = f(x_1, x_2)\},$$

noch gut im x_1, x_2, y–Koordinatensystem veranschaulichen („Gebirge“ über D). Hilfreich ist oft auch die Betrachtung der Niveaumengen („Höhenlinien“)

$$\{(x_1, x_2) \in D :\ f(x_1, x_2) = c\},$$

auf denen f den konstanten Wert c annimmt.

Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt *Häufungspunkt* einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn jede Umgebung von x_0 unendlich viele Punkte aus M enthält. Der Punkt x_0 selbst muss nicht zu M gehören. Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungpunkt von M, so gibt es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus $M\backslash\{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert. Ist $x_0 \in M$ kein Häufungspunkt von M, so heißt x_0 ein *isolierter Punkt* von M. So ist jeder Punkt aus $[a, b]$ ein Häufungspunkt von $M = (a, b)$, und 1 ist ein isolierter Punkt von $M = \mathbb{N}$.

Definition 13.6 *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *nichtleer,* $f : D \to \mathbb{R}$, *und* x_0 *sei ein Häufungspunkt von* D. *Wenn es eine Zahl* $c \in \mathbb{R}$ *gibt, so dass für* jede *Folge* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *aus* $D\backslash\{x_0\}$ *mit* $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ *der Grenzwert* $\lim_{k\to\infty} f(x_k)$ *existiert und gleich* c *ist, so nennen wir* c *den* Grenzwert von f an der Stelle x_0 *und schreiben*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c \quad \textit{oder} \quad f(x) \to c \quad \textit{für } x \to x_0.$$

Man beachte, dass x_0 nicht zu D gehören muss und dass f an der Stelle x_0 nicht definiert sein muss.

Beispiel 1 Sei $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

(wobei wir wie üblich (x,y) statt (x_1, x_2) schreiben). Dann ist $0 = (0,0)$ ein Häufungspunkt von D und $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Für jede Folge (x_k, y_k) mit $(x_k, y_k) \neq (0,0)$ und Grenzwert $(0,0)$ ist nämlich für $x_k \neq 0$

$$|f(x_k, y_k) - 0| = \Big|\frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2 + y_k^2}\Big| \leq \Big|\frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2}\Big| = |y_k^2| \to 0$$

für $(x_k, y_k) \to (0,0)$. Man beachte, dass die Abschätzung $\big|\frac{x_k^2 y_k^2}{x_k^2 + y_k^2}\big| \leq |y_k^2|$ für $x_k = 0$ offenbar ebenfalls richtig ist. ■

Beispiel 2 Sei D wie in Beispiel 1 und

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,.$$

Dann hat f an der Stelle $(0,0)$ keinen Grenzwert. Für die Folge $\big((\frac{1}{k}, 0)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ist nämlich

$$\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}, 0) = \lim_{k\to\infty} \frac{(1/k)^2 - 0}{(1/k)^2 + 0} = 1,$$

während für die Folge $\big((\frac{1}{k}, \frac{1}{k})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty} \frac{(1/k)^2 - (1/k)^2}{(1/k)^2 + (1/k)^2} = 0.$$

Beide Grenzwerte existieren, sind aber voneinander verschieden. ■

Definition 13.7 *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* stetig *an der Stelle $x_0 \in D$, wenn für* jede *Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in D mit Grenzwert x_0 gilt $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$. Die Funktion f heißt* stetig auf D, *wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.*

Ist x_0 ein isolierter Punkt von D, so ist dort jede Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Ist $x_0 \in D$ Häufungspunkt von D, so ist $f : D \to \mathbb{R}$ genau dann stetig in x_0, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$ ist.

Beispiele Die Funktion $f : R^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist stetig in $x_0 = (0,0)$ nach Beispiel 1, während nach Beispiel 2 die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

unstetig an der Stelle $(0,0)$ ist. Auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ sind beide Funktionen stetig. ■

Die uns bekannten Aussagen über stetige Funktionen von einer Veränderlichen lassen sich ohne Schwierigkeiten auf Funktionen von mehreren reellen Veränderlichen übertragen.

Satz 13.8 *Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$, so sind auch die Funktionen cf mit $c \in \mathbb{R}$, $f+g$, fg und – falls $g(x_0) \neq 0$ – f/g stetig an der Stelle x_0.*

Satz 13.9 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und D kompakt. Dann ist die Funktion f beschränkt und besitzt Maximum und Minimum, d.h. es gibt Punkte $x_{\max}, x_{\min} \in D$ mit*

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \textit{für alle } x \in D.$$

13.3 Partielle Ableitungen

In diesem Abschnitt ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$. Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, so schreiben wir statt $f(x)$ auch $f(x_1, \ldots, x_n)$. Die Definition der Ableitung einer Funktion von einer Veränderlichen,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

läßt sich nicht unmittelbar auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen, da eine Division durch $x - x_0$ nicht erklärt ist. Man kann aber analog eine *partielle Differentiation* erklären, wenn man alle Variablen bis auf eine konstant hält und die resultierende Funktion nach eben dieser Variablen ableitet.

Definition 13.10 *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ heißt in $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$* partiell differenzierbar nach x_k, $k = 1, \ldots, n$, *falls der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt die partielle Ableitung von f nach x_k *an der Stelle x^0 und wird mit $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ oder $f_{x_k}(x^0)$ bezeichnet. Die Funktion f heißt* partiell differenzierbar in x^0 (auf D), *wenn in x^0 (in jedem Punkt von D) alle partiellen Ableitungen existieren. Ist außerdem jede dieser partiellen Ableitungen stetig in x^0 (auf D), so heißt f* stetig partiell differenzierbar in x^0 *(auf D).*

Beispiel 3 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = 2x^2 + y^2$. Beim partiellen Differenzieren nach x betrachten wir y als Konstante. Wir können dann die bekannten Differentiationsregeln für Funktionen einer Veränderlichen anwenden und erhalten

$$f_x(x,y) = 4x \quad \text{sowie} \quad f_y(x,y) = 2y.$$

Analog erhält man für die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, \ldots, x_n) := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \|x\|,$$

dass sie auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ partiell differenzierbar ist und dass dort

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_{x_i}(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|}\,. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 4 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erklärt durch $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{falls } (x,y) \neq (0,0).$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ finden wir die partiellen Ableitungen sofort:

$$f_x(x,y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^2} - 4\,\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^3}\,, \quad f_y(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2} - 4\,\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^3}\,.$$

An der Stelle $(x,y) = (0,0)$ arbeiten wir mit Definition 13.10:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0, \quad f_y(0,0) = 0.$$

Also ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar. Wegen

$$f\Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\Big) = \frac{(1/n^2)}{(2/n^2)^2} = \frac{n^2}{4} \to \infty \quad \text{für } n \to \infty$$

ist f aber nicht stetig in $(0,0)$. Aus der partiellen Differenzierbarkeit folgt also *nicht* die Stetigkeit. $\blacksquare$

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so ist $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ wieder eine Funktion von D nach $\mathbb{R}$. Ist diese partiell differenzierbar nach x_ℓ, ergeben sich *partielle Ableitungen zweiter Ordnung*, die wir mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}(x) \quad \text{oder} \quad f_{x_k x_\ell}(x)$$

bezeichnen. Analog werden partielle Ableitungen höherer Ordnung erklärt und bezeichnet.

Beispiel 5 Für die erste Funktion aus Beispiel 3 ist

$$f_{xx}(x,y) = 4, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = 2.$$

Interessanter ist die durch $f(0,0) = 0$ und

$$f(x,y) := xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0)$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$ erklärte Funktion. Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$f_x(x,y) = y\,\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = x\,\frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

und für $(x,y) = (0,0)$ findet man

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \quad \text{und} \quad f_y(0,0) = 0.$$

Für die gemischten zweiten Ableitungen in $(0,0)$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h - 0}{h} = -1, \\ f_{yx}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h - 0}{h} = 1. \end{aligned}$$

■

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen darf i.Allg. also nicht vertauscht werden. Der folgende Satz gibt Bedingungen an, unter denen dieses Vertauschen erlaubt ist.

Satz 13.11 (H.A. Schwarz) *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x^0 \in D$. Alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f sollen auf D existieren. Außerdem existiere die zweite Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}$ auf D, und diese sei in x^0 stetig. Dann existiert auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}$ in x^0, und es ist*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell \partial x_k}(x^0).$$

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar an der Stelle $x^0 \in D$, so heißt

$$(\operatorname{grad} f)(x^0) := (f_{x_1}(x^0), \ldots, f_{x_n}(x^0))$$

der *Gradient* von f an der Stelle x^0. Statt $\operatorname{grad} f$ schreibt man auch ∇f (lies: Nabla).

13.4 Differenzierbarkeit

Bei der partiellen Differenzierbarkeit wird das Verhalten einer Funktion nur in Richtung der Koordinatenachsen untersucht. Das führt u.a. dazu, dass der Begriff der partiellen Differenzierbarkeit sehr schwach ist und nicht einmal die Stetigkeit der Funktion garantiert (Beispiel 4). Wir sehen uns nun einen stärkeren und für viele Zwecke geeigneten Differentiationsbegriff an. Dazu wiederholen wir die Definition der Ableitung einer Funktion von einer reellen Veränderlichen:

$$f'(x^0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x^0 + h) - f(x^0)}{h}.$$

Wir schreiben $\alpha := f'(x^0)$ und setzen

$$r(h) := \begin{cases} \frac{f(x^0+h)-f(x^0)}{h} - \alpha & \text{für } h \neq 0 \\ 0 & \text{für } h = 0. \end{cases}$$

Dann ist r eine in einer Umgebung von 0 stetige Funktion mit

$$\lim_{h \to 0} r(h) = 0, \tag{13.1}$$

und es gilt

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \alpha h + hr(h). \tag{13.2}$$

Gilt umgekehrt die Identität (13.2) mit einer Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ und mit einer in einer Umgebung von 0 definierten Funktion r mit der Eigenschaft (13.1), so ist f differenzierbar an der Stelle x^0, und $f'(x^0) = \alpha$. Die Identität (13.2) läßt sich ohne Schwierigkeiten auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen und liefert dann einen geeigneten Differenzierbarkeitsbegriff. Dazu interpretieren wir (13.2) wie folgt: Lokal (d.h. mit $x^0 = 0$, $f(x^0) = 0$) geht (13.2) über in

$$f(h) = \alpha h + hr(h), \tag{13.3}$$

wobei $hr(h)$ schneller als h gegen 0 strebt, wenn $h \to 0$. Dies kann man verstehen als eine Approximation von f durch die *lineare* Funktion $h \to \alpha h$. Dies kann man offenbar auf Funktionen von mehreren Veränderlichen und sogar auf Funktionen übertragen, deren Werte Vektoren sind, die also von einer Teilmenge D des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ abbilden. Solche Funktionen heißten auch *Vektorfelder*. Als Beispiel stellen wir uns eine durch ein Rohr strömende Flüssigkeit vor. Ordnet man jedem Punkt x im Inneren des Rohres den Geschwindigkeitsvektor des an dieser Stelle befindlichen Flüssigkeitsteilchens zu, so erhält man ein Vektorfeld. Auch das elektrische Feld ist ein Vektorfeld. Ist schließlich $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so ist die Funktion $F(x) := (\operatorname{grad} f)(x)$ ein Vektorfeld von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$. Ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ schreiben wir oft als

$$F = (F_1, \ldots, F_m)^T$$

mit Funktionen $F_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definition 13.12 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : D \to \mathbb{R}^m$ und $x^0 \in D$. Die Funktion F heißt* differenzierbar an der Stelle x^0, *wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (eine $m\times n$-Matrix A) sowie eine in einer Umgebung U von $0 \in \mathbb{R}^n$ definierte Funktion r so gibt, dass*

$$F(x^0 + h) = F(x^0) + Ah + \|h\|\, r(h) \tag{13.4}$$

für alle $h \in U$ und

$$\lim_{h\to 0} r(h) = 0. \tag{13.5}$$

Die *Ableitung* einer Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist also eine *lineare Abbildung* von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^m$, die durch eine $m\times n$-Matrix A beschrieben werden kann. Wir bezeichnen die Ableitung von $F : D \to \mathbb{R}^m$ in $x^0 \in D$ mit $F'(x^0)$ oder $(DF)(x_0)$. Ist f in jedem Punkt $x^0 \in D$ differenzierbar, so heißt F *differenzierbar auf D*.

Zwischen den eingeführten Differenzierbarkeitsbegriffen bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{array}{ccccc} F \text{ stetig partiell} & \Rightarrow & F \text{ differenzierbar} & \Rightarrow & F \text{ partiell} \\ \text{differenzierbar} & & & & \text{differenzierbar} \\ & & \Downarrow & & \\ & & F \text{ stetig} & & \end{array}$$

Die Aussage, die sich hinter dem rechten dieser Implikationspfeile verbirgt, wird im folgenden Satz präziser beschrieben.

Satz 13.13 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F = (F_1, \ldots, F_m)^T : D \to \mathbb{R}^m$ in $x^0 \in D$ differenzierbar. Dann ist jede Funktion $F_i : D \to \mathbb{R}$ in x^0 partiell differenzierbar, und die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $A = F'(x^0)$ aus* (13.4) *bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ ist*

$$J_F(x^0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^0) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x^0) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix}. \tag{13.6}$$

Die Matrix $J_F(x^0)$ heißt auch die *Jacobimatrix* oder *Funktionalmatrix* von F an der Stelle x^0. Um die Differenzierbarkeit einer Funktion $F : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m$ zu überprüfen und ihre Ableitung zu berechnen, bietet sich der folgende Weg an: Man bestimmt die partiellen Ableitungen aller Komponenten F_i von F. Sind diese stetig, so ist F differenzierbar, und die Ableitung $F'(x_0)$ wird durch die Matrix $J_F(x^0)$ aus (13.6) beschrieben.

Beweis von Satz 13.13 Sei (13.4) mit $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $r = (r_1, \ldots, r_m)^T$ sowie $h = (h_1, \ldots, h_n)^T$ erfüllt. Die i-te Zeile der Vektorgleichung (13.4) lautet dann

$$F_i(x^0 + h) = F_i(x^0) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_j + \|h\|\, r_i(h), \quad h \in U, \tag{13.7}$$

wobei $\lim_{h\to 0} r_i(h) = 0$ wegen $|r_i| \le \|r\|$. Wir fixieren ein $j \in \{1,\dots,n\}$ und wählen $h = (0,\dots,0,\, h_j,\, 0,\dots,0)^T = h_j\vec{e}_j$. Für kleine h_j liegen diese Vektoren in U, und (13.7) reduziert sich auf

$$F_i(x^0 + h_j\vec{e}_j) = F_i(x^0) + a_{ij}h_j + \|h\|\, r_i(h)$$

und für $h_j \neq 0$ auf

$$\frac{F_i(x^0 + h_j\vec{e}_j) - F_i(x^0)}{h_j} = a_{ij} + \frac{\|h\|}{h_j}\, r_i(h).$$

Wegen $|h_j| = \|h\|$ und $\lim_{h\to 0} r_i(h) = 0$ ist auch

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|h\|}{h_j}\, r_i(h) = 0,$$

und wir erhalten die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{h_j\to 0} \frac{F_i(x^0 + h_j\vec{e}_j) - F_i(x^0)}{h_j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x^0) = a_{ij}. \qquad \blacksquare$$

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine reellwertige differenzierbare Funktion, so ist speziell

$$J_f(x^0) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\big) = (\operatorname{grad} f)(x^0).$$

Vernachlässigen wir für kleine h noch den Term $\|h\|\, r(h)$ in (13.4) (der ja schneller als h gegen 0 strebt), so erhalten wir eine lineare Approximation

$$f(\vec{x}) \approx f(x^0) + (\operatorname{grad} f)(x^0)\,(\vec{x} - x^0) \tag{13.8}$$

mit $\vec{x} = x^0 + h$ und $h = \vec{x} - x^0$. Im Fall $n = 2$ schreiben wir $\vec{x}$ als (x, y) und x^0 als (x_0, y_0) und erhalten speziell

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) \tag{13.9}$$

für alle (x, y), die nahe bei (x_0, y_0) liegen. Durch die rechte Seite von (13.9) wird die Ebene

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

im $\mathbb{R}^3$ festgelegt. Dies ist die *Tangentialebene* an den Graphen der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ (den man sich als Fläche über der xy–Ebene vorstellt) im Punkt $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$.

Mit $x = (x_1,\dots,x_n)$, $x^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0)$ und $dx_k := x_k - x_k^0$ schreibt man (13.8) oft auch in symbolischer Form als

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_k.$$

Dieser Ausdruck heißt das *vollständige Differential* von f und kann wie folgt interpretiert werden: Ändert man die x_k um dx_k, so ändert sich bei linearer Approximation unter Vernachlässigung von Fehlern höherer Ordnung f um df. Die wird oft zur Fehlerabschätzung bei Messprozessen ausgenutzt. Werden statt der wahren Werte $x_1, \ldots, x_n$ mit Fehlern behaftete Werte $\hat{x}_k = x_k + \Delta x_k$, $k = 1, \ldots, n$, gemessen, so lässt sich der Fehler

$$\Delta f = f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$$

im Funktionswert abschätzen durch

$$|\Delta f| \approx \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| |\Delta x_k|,$$

wobei Fehler höherer Ordnung ignoriert werden. Sind Schranken $|\Delta x_k| \leq s_k$ für die Meßfehler bekannt, erhalten wir

$$|\Delta f| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| s_k.$$

Beispiel 6 In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathedenlängen x und y ist die Länge der Hypothenuse gleich $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wegen

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{und} \quad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

wird die Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ im Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ beschrieben durch die Gleichung

$$z = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\,(x - x_0) + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\,(y - y_0),$$

und das vollständige Differential von f lautet

$$df = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy.$$

Messen wir statt der wahren Kathedenlängen x_0, y_0 die Werte $x_0 + \Delta x$ und $y_0 + \Delta y$, so ist der resultierende Fehler bei linearer Approximation gleich

$$\Delta f \approx \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\,\Delta x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\,\Delta y = \frac{x_0 \Delta x + y_0 \Delta y}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}\,. \qquad \blacksquare$$

Wir kommen nun zu Rechenregeln für Ableitungen.

Satz 13.14 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : D \to \mathbb{R}^n$ in $x \in D$ differenzierbar. Dann ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch $\alpha f + \beta g : D \to \mathbb{R}^n$ in x differenzierbar, und es gilt*

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

Produkt- und Quotientenregel vermerken wir nur für skalarwertige Funktionen.

Satz 13.15 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar. Dann sind auch $fg : D \to \mathbb{R}$ und, falls $g(x) \neq 0$, f/g in x differenzierbar, und es ist*

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= g(x)f'(x) + f(x)g'(x),\\ (f/g)'(x) &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.\end{aligned}$$

Satz 13.16 (Kettenregel) *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, und $g : U \to \mathbb{R}^m$, $f : V \to \mathbb{R}^k$ seien Funktionen mit $g(U) \subseteq V$. Ist g in $x \in U$ und f in $g(x)$ differenzierbar, so ist die verkettete Funktion $f \circ g : U \to \mathbb{R}^k$ in x differenzierbar, und es gilt*

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \circ g'(x) \quad \textit{bzw.} \quad J_{f\circ g}(x) = J_f\big(g(x)\big)\, J_g(x).$$

Die Ableitung einer veketteten Funktion ist also gleich der Verkettung (Hintereinanderausführung) der Ableitungen. Für die Jacobimatrizen ist also das Matrixprodukt zu bilden.

Beispiel 7 Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x, y) = e^{xy}$ und $G : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ durch $G = (G_1, G_2)^T$ mit $G_1(x, y) = x \cos y$ und $G_2(x, y) = x \sin y$. Sei $H : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ gleich $F \circ G$ $\big($d.h. $H(x, y) = F\big(G(x, y)\big)\big)$. Dann sind die Funktionalmatrizen von F und G gleich

$$J_F(x, y) = \big(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y),\, \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\big) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

und

$$J_G(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x\, \sin y \\ \sin y & x\, \cos y \end{pmatrix},$$

und wegen

$$\begin{aligned} J_F\big(G(x, y)\big) &= \big(x \sin y\, e^{x^2 \sin x \cos x}, x \cos y\, e^{x^2 \sin x \cos x}\big)\\ &= x\, e^{x^2 \sin x \cos x}(\sin y, \cos y)\end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} J_H(x, y) &= J_F\big(G(x, y)\big)\, J_G(x, y)\\ &= x\, e^{x^2 \sin x \cos x}(\sin y, \cos y) \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix}\\ &= x\, e^{x^2 \sin x \cos y} \big(2 \sin y \cos y,\, -x(\sin^2 y - \cos^2 y)\big).\end{aligned}$$

■

13.5 Richtungsableitungen

Definition 13.17 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor der Länge $\|v\| = 1$. Man sagt, dass f im Punkt x eine* Ableitung in Richtung des *Vektors v besitzt, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

existiert. Dieser heißt dann die Richtungsableitung von f in Richtung v *und wird mit $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ oder $f'(x, v)$ bezeichnet.*

Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ist also eine spezielle Richtungsableitung in Richtung des Koordinateneinheitsvektors $\vec{e}_i$.

Satz 13.18 *Seien D, f, x wie in Definition 13.17, und sei f in x differenzierbar. Dann existiert für jeden Einheitsvektor $v = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$ die Ableitung von f in Richtung v im Punkt x, und es gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = f'(x)v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)v_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)v_n. \tag{13.10}$$

Beweis Für hinreichend kleines t ist in den Bezeichnungen von Definition 13.12 von $f'(x)$

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{f'(x) \cdot tv + \|tv\| \, r(tv)}{t} = f'(x) \cdot v + \frac{|t|}{t} \, r(tv).$$

Aus $\lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} \, r(tv) = 0$ folgt die Behauptung. ∎

Mit Hilfe des Gradienten $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ und des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ können wir (13.10) auch schreiben als

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle (\operatorname{grad} f)(x), v \rangle. \tag{13.11}$$

Führt man wie im $\mathbb{R}^2$ den Winkel $\varphi \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ durch $\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\| \cos \varphi$ ein, so folgt für $(\operatorname{grad} f)(x) \neq 0$ für den Winkel φ zwischen $(\operatorname{grad} f)(x)$ und v

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \|(\operatorname{grad} f)(x)\| \cdot \cos \varphi.$$

Folgerung 13.19 *Seien D, f, x wie in Definition 13.17 und sei $(\operatorname{grad} f)(x) \neq 0$. Dann nimmt die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ ihren größten Wert für $\cos \varphi = 1$ bzw. $\varphi = 0$ an, d.h. wenn $(\operatorname{grad} f)(x)$ und v in die gleiche Richtung zeigen. Der Gradient von f zeigt also in Richtung des steilsten Anstiegs von f in x.*

13.6 Mittelwertsatz und Satz von Taylor

Der Mittelwertsatz für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sagt, dass man für zwei Punkte $a < b$ einen Punkt $\xi \in (a, b)$ findet, so dass

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a). \tag{13.12}$$

Das folgende Beispiel zeigt, dass für vektorwertige Funktionen der Mittelwertsatz in dieser Form *nicht* gelten kann.

Beispiel 8 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x) = (\cos x, \sin x)^T$. Dann ist $f'(x) = (-\sin x, \cos x)^T$ und nach Pythagoras

$$\|f'(x)\| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1$$

für alle x. Es gibt deshalb *kein* $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = f(2\pi) - f(0) = f'(\xi) \cdot 2\pi. \qquad \blacksquare$$

Für *reellwertige* Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ gilt der Mittelwertsatz jedoch in der gewohnten Form.

Satz 13.20 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D. Weiter sei $x + th \in D$ für alle $t \in [0, 1]$ (d.h. die Verbindungsstrecke von x nach $x + h$ liege komplett in D). Dann gibt es ein $\tau \in (0, 1)$ mit*

$$f(x + h) - f(x) = f'(x + \tau h)h.$$

Zum Beweis schränkt man die Funktion f auf die Strecke $[x, x + h] = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x + th \text{ mit } t \in [0, 1]\}$ ein, betrachtet die Funktion

$$g : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(x + th) \tag{13.13}$$

und wendet auf diese den Mittelwertsatz (13.12) an. $\blacksquare$

Für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$ ist die folgende Version des Mittelwertsatzes die nächstbeste.

Satz 13.21 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar auf D und $x+th \in D$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann ist*

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 f'(x + \tau h)h \, d\tau. \tag{13.14}$$

Dabei ist das Integral über die matrixwertige Funktion $\tau \mapsto f'(x+\tau h)$ komponentenweise zu berechnen. Der Mittelwertsatz in der Form (13.14) ist oft nützlich,

wenn man $\|f(x+h) - f(x)\|$ abschätzen möchte. Der Beweis ist wieder ganz einfach. Mit der Funktion g aus (13.13) ist

$$f(x+h) - f(x) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(\tau)d\tau,$$

und nach der Kettenregel ist $g'(\tau) = f'(x+\tau h) \cdot h$. ∎

Wir lernen nun den Satz von Taylor für Funktionen mehrerer Veränderlicher kennen. Dabei beschränken wir uns auf reellwertige Funktionen. Zunächst führen wir einige Bezeichnungen ein, die uns helfen, die Übersicht über die zahlreichen Summanden in der Taylorentwicklung zu behalten.

Ein *Multiindex* ist ein n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sei $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ seine *Ordnung* und $\alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_n!$ seine *Fakultät*. Für jede $|\alpha|$-mal partiell differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ kürzen wir die partiellen Ableitungen mit

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

ab, und für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{a_n}.$$

Satz 13.22 (Satz von Taylor) *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ $(k+1)$–mal stetig partiell differenzierbar, und sei $x + th \in D$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gibt es ein $\tau \in (0,1)$ so, dass*

$$f(x+h) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \le k} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(x)h^\alpha}_{\substack{\textit{Taylorpolynom der} \\ \textit{Ordnung } k}} + \underbrace{\sum_{|\alpha| = k+1} \frac{(D^\alpha f)(x+\tau h)}{\alpha!} h^\alpha}_{\textit{Restglied}}.$$

Beispiel 9 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \sin(x+2y)$. Dann ist

$$f_x(x,y) = \cos(x+2y), \quad f_y(x,y) = 2\cos(x+2y)$$

$$f_{xx}(x,y) = -\sin(x+2y), \quad f_{xy}(x,y) = -2\sin(x+2y), \quad f_{yy} = -4\sin(x+2y),$$

und der Satz von Taylor für die Ordnung 1 liefert

$$f(x+h,\, y+k) = f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k + R$$

bzw.

$$\sin\big(x+h+2(y+k)\big) = \sin(x+2y) + \cos(x+2y)h + 2\cos(x+2y)k + R$$

mit dem Restglied

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2}\big(h^2 f_{xx}(\overline{x},\overline{y}) + 2hk\, f_{xy}(\overline{x},\overline{y}) + k^2 f_{yy}(\overline{x},\overline{y})\big) \\ &= -\frac{\sin(\overline{x}+2\overline{y})}{2}\,(h^2+4hk+4k^2) \end{aligned}$$

mit $\overline{x} = x + \tau h$, $\overline{y} = y + \tau h$ mit einem $\tau \in (0,1)$. ∎

Beispiel 10 Wir bestimmen das Taylorpolynom 2. Ordnung für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto e^{x^2+\cos y}$$

im Punkt $(0,0)$. Dieses ist gleich (mit $D_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ und $D_2 = \frac{\partial}{\partial y}$)

$$\begin{aligned} f(0,0) + (D_1 f)(0,0)h + (D_2 f)(0,0)k + \frac{1}{2}(D_1^2 f)(0,0)\cdot h^2 \\ + \frac{1}{2}(D_2^2 f)(0,0)k^2 + (D_1 D_2 f)(0,0)hk. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen von f bis zur 2. Ordnung sind

$$\begin{array}{rcll} (D_1 f)(x,y) &=& 2x\, e^{x^2+cosy} & \Rightarrow \quad (D_1 f)(0,0) = 0, \\ (D_2 f)(x,y) &=& -\sin y\, e^{x^2+cosy} & \Rightarrow \quad (D_2 f)(0,0) = 0, \\ (D_1^2 f)(x,y) &=& (2+4x^2)e^{x^2+cosy} & \Rightarrow \quad (D_1^2 f)(0,0) = 2e, \\ (D_2^2 f)(x,y) &=& (-\cos y + \sin^2 y)e^{x^2+cosy} & \Rightarrow \quad (D_2^2 f)(0,0) = -e, \\ (D_1 D_2 f)(x,y) &=& -2x\sin y\, e^{x^2+cosy} & \Rightarrow \quad (D_1 D_2 f)(0,0) = 0. \end{array}$$

Das gesuchte Taylorpolynom ist also

$$(h,k) \mapsto e + eh^2 - \frac{e}{2}\,k^2.$$ ∎

Wir sehen uns die Bestandteile $P_m(h) := \sum_{|\alpha|=m} \frac{(D^\alpha f)(x)}{\alpha!} h^\alpha$ des Taylorpolynoms für $m = 0,1,2$ genauer an.

$\boldsymbol{m=0:}$ Dann ist $\alpha = (0,\ldots,0)$ und $P_0(h) = f(x)$ (konstantes Polynom).

$\boldsymbol{m=1:}$ Die einzigen n-Tupel $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = 1$ sind die Tupel $\alpha_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ mit der 1 an der i-ten Stelle. Wegen $D^{\alpha_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\alpha_i! = 1$ und $h^{\alpha_i} = h_i$ ist

$$P_1(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i = \langle (\operatorname{grad} f)(x), h\rangle.$$

$\boldsymbol{m=2:}$ Man rechnet leicht nach, dass

$$P_2(h) = \sum_{|\alpha|=2} \frac{(D^\alpha h)(x)}{\alpha!}\, h^\alpha = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} f\Big)(x) h_i h_j.$$

Um dies kürzer zu schreiben, bezeichnen wir für jede zweimal partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ die $n \times n$-Matrix

$$\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\Big)_{i,j=1}^{n}$$

mit (Hess f)(x) und nennen sie die *Hesse-Matrix* oder den *Hessian* von f.

Sind die zweiten partiellen Ableitungen von f stetig, so ist (Hess f)(x) eine symmetrische Matrix (Satz von Schwarz). Mit dieser Matrix ist

$$P_2(h) = \frac{1}{2}\langle(\text{Hess } f)(x)\ h, h\rangle.$$

Unter den Voraussetzungen von Satz 13.22 mit $k = 2$ können wir das Taylorpolynom 2. Ordnung von f also schreiben als

$$h = (h_1, \ldots, h_n) \mapsto c + \langle a, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle$$

mit $c = f(x), a = (\text{grad}\, f)(x)$ und $A =$(Hess f)(x). ∎

13.7 Lokale Extrema

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x^{(0)} \in D$ ein *globales* (oder *absolutes*) *Maximum*, wenn $f(x^{(0)}) \geq f(x)$ für alle $x \in D$. Die Funktion f hat in $x^{(0)}$ ein *lokales* (oder *relatives*) *Maximum*, wenn es eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von $x^{(0)}$ gibt, so dass $f(x^{(0)}) \geq f(x)$ für alle x aus U. Analog definiert man globale und lokale Minima. Das Wort „lokal“ weist darauf hin, dass an dieser Stelle ein Extremum nur bezüglich einer (nicht näher bestimmten) Umgebung von $x^{(0)}$ vorliegt. Stetige Funktionen auf kompakten Mengen besitzen stets ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wir sehen uns nun lokale Extrema differenzierbarer Funktionen an.

Satz 13.23 (Notwendige Bedingung) *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Besitzt f in $x^{(0)} \in D$ ein lokales Extremum, so ist*

$$(\text{grad}\, f)(x^{(0)}) = 0, \tag{13.15}$$

d.h. alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$ sind gleich Null.

Ist (13.15) erfüllt, heißt $x^{(0)}$ auch ein *stationärer Punkt*. Stationäre Punkte, die keine Extrema sind, heißen auch *Sattelpunkte*. Um zu prüfen, ob ein stationärer Punkt tatsächlich ein lokales Extremum ist, zieht man wieder die zweiten Ableitungen zu Rate.

Satz 13.24 (Hinreichende Bedingung) *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar nach allen Variablen, und sei $x^{(0)} \in D$ ein stationärer Punkt von f, d.h.* $(\text{grad}\, f)(x^{(0)}) = 0$. *Dann gilt:*

a) *ist* (Hess $f)(x^{(0)})$ *positiv definit, so hat* f *in* $x^{(0)}$ *ein lokales Minimum.*

b) *ist* (Hess $f)(x^{(0)})$ *negativ definit, so hat* f *in* $x^{(0)}$ *ein lokales Maximum.*

c) *ist* (Hess $f)(x^{(0)})$ *indefinit, so hat* f *in* $x^{(0)}$ *kein lokales Extremum.*

Ist (Hess $f)(x^0)$ nur (positiv oder negativ) semidefinit, so ist keine Entscheidung möglich an Hand der ersten und zweiten partiellen Ableitungen. Für Funktionen von zwei reellen Veränderlichen kann Satz 13.24 auch wie folgt formuliert werden.

Satz 13.25 *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}^2$*, die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *habe stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung, und in* $(x_0, y_0) \in D$ *sei* $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$*. Ist*

$$\big(f_{xy}(x_0, y_0)\big)^2 < f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0), \tag{13.16}$$

so hat f *an der Stelle* (x_0, y_0) *ein lokales Extremum, und zwar ein lokales Minimum, wenn* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$*, und ein lokales Maximum, wenn* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$*.*

Gilt in (13.16) das Zeichen $>$, so liegt ein Sattelpunkt vor.

Beispiel 11

a) Sei $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$ auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$f_x(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{und} \quad f_y(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) = 0.$$

Also ist $x^{(0)} = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ein stationärer Punkt und sogar ein lokales Maximum, da $f_{xx}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -1 < 0$ und

$$\big(f_{xy}(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\big)^2 = \cos^2\frac{\pi}{2} \cos^2\frac{\pi}{2} = 0 < 1 = f_{xx}(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) f_{yy}(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

b) Wir suchen alle lokalen Extrema von $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$ auf $\mathbb{R}^2$. Wegen $f_x(x, y) = 3x^2 - 12y$ und $f_y(x, y) = 24y^2 - 12x$ ergeben sich alle stationären (also extremwertverdächtigen) Punkte von f aus

$$3x^2 - 12y = 0 \quad \text{und} \quad 24y^2 - 12x = 0.$$

Einsetzen von $y = \frac{1}{4}x^2$ (aus der ersten Gleichung) in die zweite Gleichung ergibt $\frac{1}{8}x^4 = x$. Diese Gleichung hat genau zwei reelle Lösungen, nämlich $x_0 = 0$ und $x_1 = 2$. Hieraus erhält man mit der ersten Gleichung $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$. Demnach sind $(0, 0)$ und $(2, 1)$ die einzigen Kandidaten für lokale Extremstellen. Nun ist

$$\big(f_{xy}(0, 0)\big)^2 = (-12)^2 = 144 > 0 = f_{xx}(0, 0) f_{yy}(0, 0)$$

so dass $(0, 0)$ kein lokales Extremum von f ist. Dagegen ist

$$\big(f_{xy}(2, 1)\big)^2 = (-12)^2 = 144 < 576 = 12 \cdot 48 = f_{xx}(2, 1) f_{yy}(2, 1)$$

und $f_{xx}(2, 1) = 12 > 0$, so dass in $(2, 1)$ ein lokales Minimum vorliegt.

c) Für die auf $\mathbb{R}^3$ durch

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz + 2$$

definierte Funktion ist an der Stelle $x^{(0)} = (0,0,0)$

$$(\operatorname{grad} f)(0,0,0) = (2x + y - z, 2y + x, 2z - x)\,|_{(0,0,0)} = (0,0,0).$$

Also ist $(0,0,0)$ ein stationärer Punkt. Weiter ist

$$(\text{Hess } f)\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}$, und diese Matrix ist positiv definit, wie man mit dem Hurwitzkriterium (Satz 11.22) leicht überprüft:

$$\det(2) = 2 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0.$$

Also liegt in $(0,0,0)$ ein lokales Minimum von f vor. ∎

Um globale Extrema von $f : D \to \mathbb{R}$ zu bestimmen, sucht man zunächst die lokalen Extema im Inneren von D und untersucht dann noch das Verhalten von f in der Nähe des Randes von D.

13.8 Parameterabhängige Integrale

Wir betrachten nun Integrale, deren Integrand f neben der Integrationsvariablen x noch von einem Paramter y abhängt. Das Resultat der Integration ist dann ebenfalls von y abhängig, so dass durch

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

eine Funktion g definiert wird. Wir untersuchen die Stetigkeit, Diffenzierbarkeit und Integrierbarkeit von g und lernen dabei weitere Aussagen über das Vertauschen von Grenzprozessen kennen.

Satz 13.26 *Die Funktion $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ sei stetig, und sei*

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \quad \textit{für } y \in [c,d].$$

Dann gilt

a) *Die Funktion g ist stetig auf $[c,d]$.*

b) *Die Funktion g ist Riemann-integrierbar auf $[c,d]$, und*

$$\int_c^d g(y)\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

c) *Ist f auf einer offenen Menge U mit $[a,b]\times[c,d]\subseteq U$ definiert und stetig, und besitzt f auf U eine stetige partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$, so ist g auf $[c,d]$ differenzierbar, und*

$$\frac{dg}{dy} = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

In (b) darf man also die Integrationsreihenfolge vertauschen, und in (c) Differentiation und Integration.

Wir geben noch eine Verallgemeinerung der letzten Aussage dieses Satzes an, bei der auch die Integrationsgrenzen vom Parameter y abhängen dürfen.

Satz 13.27 *Sei $J\subseteq\mathbb{R}^2$ eine offene Menge mit $[a,b]\times[c,d]\subseteq J$, und sei $f: J\to\mathbb{R}$ stetig und stetig partiell differenzierbar nach y auf J. Weiter seien $\varphi:[c,d]\to[a,b], \psi:[c,d]\to[a,b]$ stetig differenzierbare Funktionen mit $\varphi(y)\le\psi(y)$ für alle $y\in[c,d]$. Schließlich sei*

$$g(y) := \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \qquad \text{für } y\in[c,d].$$

Dann ist g differenzierbar auf $[c,d]$, und es ist

$$\frac{dg}{dy} = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(\psi(y),y)\psi'(y) - f\big(\varphi(y),y\big)\varphi'(y).$$

Beispiel 12 Sei $f(x,y)=e^{xy}$ für $(x,y)\in[0,1]\times[-1,1]$. Da f stetig ist, ist auch die Funktion

$$g(y) = \int_0^1 e^{xy}\,dx = \begin{cases} 1 & \text{für } y=0 \\ \frac{e^y-1}{y} & \text{für } y\in[-1,1]\backslash\{0\} \end{cases}$$

stetig. Da außerdem $\frac{\partial f}{\partial g} = x\,e^{xy}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist, ist g differenzierbar auf $[-1,1]$ mit

$$\frac{dg}{dy} = \int_0^1 x\,e^{xy} = \begin{cases} 1/2 & \text{für } y=0 \\ \frac{(y-1)e^y+1}{y^2} & \text{für } y\in[-1,1]\backslash\{0\}. \end{cases}$$

■

Beispiel 13 Für $|t| < 1$ berechnen wir das Integral

$$F(t) := \int_0^\pi \ln(1 - 2t\cos x + t^2)dx. \tag{13.17}$$

Um Satz 13.26 benutzen zu können, wählen wir ein $a \in (0,1)$ mit $t \in [-a,a]$. Die Funktion

$$f(x,t) = \ln(1 - 2t\cos x + t^2)$$

ist nach t stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{2t - 2\cos x}{1 - 2t\cos x + t^2} \quad \text{auf} \quad [0,\pi] \times [-a,a].$$

Aus Satz 13.26 (c) folgt

$$F'(t) = \int_0^\pi \frac{2t - 2\cos x}{1 - 2t\cos x + t^2}\, dx.$$

Zur Berechnung dieses Integrals substituieren wir

$$s := \tan\frac{x}{2} \quad \text{bzw.} \quad x = 2\arctan s.$$

Dann ist $\frac{dx}{ds} = \frac{2}{1+s^2}$ bzw. (formal) $dx = \frac{2ds}{1+s^2}$ sowie

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - s^2}{1 + s^2}.$$

Das gesuchte Integral geht über in

$$\int_0^\infty \frac{2t - 2\frac{1-s^2}{1+s^2}}{1 - 2t\frac{1-s^2}{1+s^2} + t^2} \cdot \frac{2}{1+s^2}\, ds = 4\int_0^\infty \frac{s^2(1+t) - (1-t)}{(1+t)^2 s^4 + 2(1+t^2)s^2 + (1-t)^2}\, ds.$$

Partialbruchzerlegung liefert

$$4\frac{s^2(1+t) - (1-t)}{(1+t^2)s^4 + 2(1+t^2)s^2 + (1-t)^2} = \frac{2}{t}\Big(\frac{1}{s^2+1} + \frac{t^2-1}{(1+t)^2 s^2 + (1-t)^2}\Big),$$

und mit dem Grundintegral

$$\int \frac{1}{ax^2 + c}\, dx = \frac{1}{\sqrt{ac}} \arctan\sqrt{\frac{a}{c}}\, x \quad \text{für} \quad ac > 0$$

erhalten wir

$$F'(t) = \frac{2}{t}\Big(\arctan s - \arctan(\frac{1+t}{1-t}\, s)\Big)\Big|_0^\infty = 0$$

(man beachte, dass $\arctan 0 = 0$ und $\lim_{s\to\infty} \arctan s = \frac{\pi}{2}$). Also ist F eine *konstante Funktion*, und wir bestimmen ihren (einzigen) Wert, indem wir in (13.17) $t = 0$ setzen:

$$F(t) = F(0) = \int_0^\pi \ln 1\, dx = 0. \qquad \blacksquare$$

13.9 Implizite Funktionen und Umkehrabbildungen

Eine der typischsten Aufgaben der Mathematik ist das Lösen von Gleichungen. Sind X, Y geeignete Mengen und ist $F : X \to Y$ eine entsprechende Abbildung, so sind in Verbindung mit der Gleichung $F(x) = y$ mit $y \in Y$ folgende Fragen von Interesse:

- Für welche $y \in Y$ hat die Gleichung $F(x) = y$ eine Lösung $x \in X$?
- Wenn die Gleichung $F(x) = y$ für ein $y \in Y$ lösbar ist, wieviele Lösungen hat sie dann?
- Falls die Gleichung $F(x) = y$ für alle $y \in Y$ eindeutig lösbar ist, wie hängen dann die Lösungen x von der rechten Seite y ab? Ist diese Abhängigkeit stetig oder sogar differenzierbar?
- Falls die Gleichung $F(x) = y$ mehrere Lösungen besitzt, wie kann man die Lösungsmenge geeignet darstellen?
- Wie findet man Lösungen?

Die erste Frage ist eng mit der Surjektivität von F verknüpft, und die zweite mit der Injektivität. Ist F surjektiv und injektiv (also bijektiv), so besitzt F eine Umkehrabbildung F^{-1}, und der dritte Punkt fragt nach der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von F^{-1}. Die vierte Frage führt auf den Begriff der *Mannigfaltigkeit*, den wir hier nicht besprechen.
Wir werden nun sehen, wie die uns zugänglichen Mittel der Analysis bei der Beantwortung der Fragen $1 - 3$ helfen.

Zunächst betrachten wir Abbildungen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Statt $F(x) = y$ können wir natürlich auch $F(x) - y = 0$ schreiben, so dass die Gleichung $F(x) = y$ ein Spezialfall der folgenden allgemeineren Aufgabenstellung wird. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion von zwei reellen Veränderlichen. Wir betrachten das Problem, die Gleichung $g(x, y) = 0$ nach y aufzulösen. (Diese Bezeichnungen haben sich so eingebürgert. Natürlich möchten wir $F(x) = y$ nach x auflösen, so dass man die Variablen umbenennen müßte.)
Wir suchen also eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem geeigneten Intervall I, so dass für alle $x \in I$ gilt $g\big(x, f(x)\big) = 0$. Im Falle der Existenz einer solchen Funktion f haben wir durch $y = f(x), x \in I$, eine Auflösung der Gleichung $g(x, y) = 0$ gegeben. Man sagt auch, dass die Funktion f durch die Gleichung $g(x, y)$ *implizit* festgelegt wird.

Satz 13.28 *Sei $g : (a, b) \times (c, d) \to \mathbb{R}$ eine einmal stetig partiell differenzierbare Funktion. Weiter sei $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ mit $g(x_0, y_0) = 0$ und $g_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gibt es ein Intervall $U \subseteq (a, b)$ um x_0, ein Intervall $V \subseteq (c, d)$ um y_0 und eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to V$ mit $f(x_0) = y_0$ und $g\big(x, f(x)\big) =$*

0 *für alle* $x \in U$*. Wählt man* U *so klein, dass* $g_y\big(x, f(x)\big) \neq 0$ *für alle* $x \in U$*, so gilt weiter*

$$f'(x) = -\frac{g_x\big(x, f(x)\big)}{g_y\big(x, f(x)\big)} \quad \textit{für} \quad x \in U. \tag{13.18}$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes ist die Gleichung $g(x, y) = 0$ um (x_0, y_0) *lokal* nach y auflösbar. Es ist dabei bemerkenswert, dass $f'(x_0)$ bestimmt werden kann, ohne f explizit zu kennen:

$$f'(x_0) = -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}.$$

Die Identität (13.18) folgt leicht durch Anwendung der Kettenregel auf die Gleichung $g\big(x, f(x)\big) = 0$:

$$g_x(x, f(x)\big) \cdot 1 + g_y\big(x, f(x)\big) \cdot f'(x) = 0.$$

Beispiel 14 Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Die Gleichung $g(x, y) = 0$ ist genau dann erfüllt, wenn (x, y) auf der Einheitskreislinie um $(0, 0)$ liegt. Für $x \notin [-1, 1]$ hat $g(x, y)$ daher keine Lösung. Für $x = \pm 1$ gibt es natürlich die eindeutig bestimmte Lösung $y = 0$, man kann aber die Lösungen in einer Umgebung von $x = +1$ bzw. $x = -1$ nicht als eine *Funktion* von x darstellen (Warum?).
Schließlich gibt es für jeden Punkt $x \in (-1, 1)$ zwei Lösungen von $g(x, y) = 0$, nämlich $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ und $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$. Betrachten wir dagegen die Gleichung $g(x, y) = 0$ nur für solche (x, y), die in einer $\frac{1}{2}$-Umgebung von $(0, 1)$ liegen so existiert in dieser Umgebung genau eine Lösung, nämlich $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Man beachte, dass $g_y(0, 1) = 2 \neq 0$ aber $g_y(1, 0) = 0$. Aus (13.18) erhalten wir

$$f'(x) = -\frac{2x}{2f(x)} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{für} \quad x \in (-1/2, 1/2)$$

was man natürlich auch leicht direkt nachrechnet. Man beachte, dass es für dieses Beispiel einfach war, eine Umgebung von $x_0 = 0$ anzugeben, auf der y durch x eindeutig bestimmt ist (während Satz 13.28 nur die Existenz einer solchen Umgebung behauptet). ∎

Für vektorwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher kann man Satz 13.28 wie folgt verallgemeinern.

Satz 13.29 (Satz über implizite Funktionen) *Seien* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $V \subseteq \mathbb{R}^m$ *offen, und für* $k = 1, \ldots, m$ *sei* $g_k : U \times V$ *eine einmal stetig partiell differenzierbare Funktion. Sei* $(x_0, y_0) \in U \times V$ *ein Punkt mit*

$$g_k(x_0, y_0) = 0 \quad \textit{für jedes } k$$

und mit

$$\det \frac{\partial(g_1,\dots,g_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}(x_0,y_0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(x_0,y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

so gibt es eine Umgebung $U' \subseteq U$ von x_0, eine Umgebung $V' \subseteq V$ von y_0, sowie m stetig differenzierbare Funktionen $f_j : U' \to \mathbb{R}$ mit $f = (f_1,\dots,f_m)^T : U' \to V'$ und

$$\big(f_1(x_0),\dots,f_m(x_0)\big)^T = y_0$$

sowie

$$g_k\big(x_1,\dots,x_n,f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\big) = 0$$

für alle $k = 1,\dots,m$ und alle $(x_1,\dots,x_n) \in U'$.

Beispiel 15 Bei der Transformation kartesischer Koordinaten (x_1,x_2) in Polarkoordinaten (r,φ) ist $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. Mit $x = (x_1,x_2)$ und $y = (y_1,y_2) = (r,\varphi)$ haben wir

$$g_1(x,y) = x_1 - r\cos\varphi, \quad g_2(x,y) = x_2 - r\sin\varphi.$$

Für die Funktionaldeterminante gilt

$$\det \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(r,\varphi)} = \det \begin{pmatrix} -\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin_\varphi & -r\cos\varphi \end{pmatrix} = r.$$

Für $r \neq 0$ ist demnach (lokal) eine eindeutige Auflösung nach r und φ möglich. ■

Eine wichtige Folgerung aus Satz 13.29 ist der folgende Satz.

Satz 13.30 (Satz über die Umkehrfunktion) *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ einmal stetig partiell differenzierbar. Ist $f'(x_0)$ invertierbar für ein $x_0 \in U$, so ist f um x_0 lokal umkehrbar, d.h. es gibt Umgebungen $U' \subseteq U$ von x_0 und $V' \subseteq \mathbb{R}^n$ von $f(x_0)$, so dass $f|_{U'} : U' \to V'$ eine Bijektion ist, und die lokale Umkehrfunktion ist ebenfalls einmal stetig partiell differenzierbar.*

Für den Beweis wendet man Satz 13.29 auf die Funktion

$$g(x,y) = x - f(y)$$

an. ■

13.10 Extrema unter Nebenbedingungen

Im Abschnitt 13.7 haben wir lokale Extrema von Funktionen studiert, die auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definiert sind. Wir betrachten nun Situationen, die in praktischen Problemen viel häufiger auftreten: Wir untersuchen Extrema von Funktionen unter Nebenbedingungen.

Beispiel. Unter allen Rechtecken mit der Fläche 1 suchen wir das mit dem kleinsten Umfang. Bezeichnen wir die Seiten des Rechtecks mit x und y, so wollen wir die Funktion $f(x, y) = 2x + 2y$ unter der *Nebenbedingung* $xy = 1$ bzw. $g(x, y) := xy - 1 = 0$ minimieren. ∎

Dabei wollen wir *vermeiden*, die Nebenbedingungen nach einer der Variablen umzuformen und in die zu minimierende Funktion einzusetzen, da dies in der Regel Schwierigkeiten bereitet. Wir lernen nun die *Methode der Lagrange-Multiplikatoren* kennen, mit der die Schwierigkeiten des Umformens nach einer Variablen vermieden werden können.

Zunächst einige Begriffe. Wir suchen Extrema einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei die Menge der zulässigen Punkte $x = (x_1, \ldots, x_n)$ durch eine Nebenbedingung der Form $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eingeschränkt wird. Man nennt $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)})$ eine *relative Maximalstelle* (*Minimalstelle*) *von f unter der Nebenbedingung* $g(x) = 0$, wenn es eine Umgebung U von $x^{(0)}$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x^{(0)})$ $\big($bzw. $f(x) \geq f(x^{(0)})\big)$ für alle $x \in U$ mit $g(x) = 0$.

Zum Auffinden von Extremstellen unter Nebenbedingungen ist folgender Satz hilfreich.

Satz 13.31 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$ seien einmal stetig partiell differenzierbar auf U. Hat die Funktion f an der Stelle $x^{(0)} \in U$ ein relatives Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$, und sind nicht alle partiellen Ableitungen von g an der Stelle $x^{(0)}$ gleich 0, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit*

$$f_{x_i}(x^{(0)}) + \lambda g_{x_i}(x^{(0)}) = 0 \quad \textit{für } i = 1, \ldots, n. \tag{13.19}$$

Die Gleichungen (13.19) lassen sich zusammenfassen zu

$$(\operatorname{grad} f)(x^{(0)}) + \lambda(\operatorname{grad} g)(x^{(0)}) = 0.$$

Zur praktischen Bestimmung relativer Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ kann man wie folgt vorgehen. Man bildet eine Hilfsfunktion $L : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die neben $x_1, \ldots, x_n$ von einer reellen Variablen λ abhängt:

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) := f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda g(x_1, \ldots, x_n).$$

Diese Funktion L heißt auch *Lagrange-Funktion*, und λ heißt *Lagrange-Multiplikator*. Nun betrachtet man das System der $n+1$ Gleichungen.

$$\begin{aligned} L_{x_1}(x,\lambda) &= f_{x_1}(x)+\lambda g_{x_1}(x) &&= 0 \\ L_{x_2}(x,\lambda) &= f_{x_2}(x)+\lambda g_{x_2}(x) &&= 0 \\ &\vdots \\ L_{x_n}(x,\lambda) &= f_{x_n}(x)+\lambda g_{x_n}(x) &&= 0 \\ L_{\lambda}(x,\lambda) &= g(x) &&= 0. \end{aligned} \tag{13.20}$$

Auf dieses System wären wir auch gestoßen, wenn wir auf die übliche Weise die lokale Extrema der Lagrange-Funktion L bestimmen wollten. Jede Lösung $(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},\lambda^{(0)})$ von (13.20) liefert nun einen *Kandidaten* $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ für eine relative Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g(x)=0$. Ob ein solcher Kandidat tatsächlich eine relative Extremstelle unter der Nebenbedingung $g(x)=0$ ist, muss jeweils gesondert untersucht werden. Der Wert $\lambda^{(0)}$ ist dabei irrelevant.

Beispiel 16 In unserem Beispiel von oben ist $U=(0,\infty)\times(0,\infty)$, $f(x,y)=2x+2y$ und $g(x,y)=xy-1$. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(x,y,\lambda)=2x+2y+\lambda(xy-1),$$

und partielles Ableiten nach x,y und λ sowie Nullsetzen liefert

$$\begin{aligned} 2+\lambda x &= 0 \\ 2+\lambda y &= 0 \\ xy &= 1. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $x=-\frac{2}{\lambda}=y$, und aus der dritten Gleichung erhalten wir $x=y=1$. Die einzige extremwertverdächtige Stelle ist also $(x,y)=(1,1)$. Nun muß man sich noch klarmachen, dass an dieser Stelle tatsächlich ein (sogar globales) Minimum unter der Nebenbedingung $g(x,y)=0$ vorliegt (z.B. durch die Überlegung, dass die Funktion f auf der Hyperbel $\{(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty):xy=1\}$ für $x\to\infty$ oder $y\to\infty$ beliebig große Werte annimmt. ■

Beispiel 17 Gesucht sind Maximum und Minimum der Funktion $f(x,y)=xy$ unter der Nebenbedingung $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$, d.h. auf der Einheitskreislinie mit dem Mittelpunkt $(0,0)$. Der Gradient

$$(\operatorname{grad} g)(x,y)=(2x,2y)$$

ist offenbar in jedem Punkt der Einheitskreislinie ungleich Null, so dass Satz 13.31 anwendbar ist. Wir bilden die Lagrange-Funktion

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=xy+\lambda(x^2+y^2-1)$$

und setzen ihre partiellen Ableitungen Null:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \frac{\partial L}{\partial x} & = & 0 & \Rightarrow & y+2\lambda x & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} & = & 0 & \Rightarrow & x+2\lambda y & = & 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} & = & 0 & \Rightarrow & x^2+y^2 & = & 1. \end{array}$$

Wir multiplizieren die erste erhaltene Gleichung mit x, die zweite mit y und finden, dass $2\lambda x^2 = 2\lambda y^2$ sein muss. Da $\lambda \neq 0$ sein muss, ist $x^2 = y^2$, weshalb zusammen mit der dritten Gleichung für (x, y) die Paare

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\ (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}),\ (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{und} \quad (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

in Frage kommen. Diese lösen tatsächlich das Gleichungssystem (die beiden ersten Paare für $\lambda = -1/2$, die beiden anderen mit $\lambda = 1/2$). Als Funktionswert ergibt sich für die ersten beiden Paare $+1/2$, für die anderen jeweils $-1/2$. Da f als stetige Funktion auf einer kompakten Menge Maximum und Minimum annehmen muss, ist $1/2$ das Maximum und $-1/2$ das Minimum von f. ∎

Beispiel 18 Gesucht wird ein Dreieck, das bei gegebenem Umfang u maximalen Flächeninhalt besitzt. Sind $x, y, z > 0$ die Seitenlängen des Dreiecks, so ist $u = x + y + z$, und der Flächeninhalt ist

$$F = \sqrt{\frac{u}{2}(\frac{u}{2} - x)(\frac{u}{2} - y)(\frac{u}{2} - z)}$$

(Heronsche Formel). Da F genau dann maximal wird, wenn F^2 maximal wird, haben wir die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = \frac{u}{2}(\frac{u}{2} - x)(\frac{u}{2} - y)(\frac{u}{2} - z),$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = x + y + z - u = 0$$

zu maximieren. Die Lagrange-Funktion L lautet

$$L(x, y, z, \lambda) = \frac{u}{2}(\frac{u}{2} - x)(\frac{u}{2} - y)(\frac{u}{2} - z) + \lambda(x + y + z - u) = 0,$$

und Nullsetzen der partiellen Ableitungen ergibt

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} L_x(x, y, z, \lambda) & = & -\frac{u}{2}(\frac{u}{2} - y)(\frac{u}{2} - z) + \lambda & = & 0 \\ L_y(x, y, z, \lambda) & = & -\frac{u}{2}(\frac{u}{2} - x)(\frac{u}{2} - z) + \lambda & = & 0 \\ L_z(x, y, z, \lambda) & = & -\frac{u}{2}(\frac{u}{2} - x)(\frac{u}{2} - y) + \lambda & = & 0 \\ L_\lambda(x, y, z, \lambda) & = & x + y + z - u & = & 0. \end{array}$$

Subtraktion der 2. von der ersten Gleichung liefert

$$-\frac{u}{2}(x-y)\,(\frac{u}{2}-z)=0.$$

Also ist $\frac{u}{2}-z=0$ oder $x=y$. Für $\frac{u}{2}-z=0$ ist $f(x,y,z)=0$, also mit Sicherheit kein Maximum. Also bleibt nur $x=y$. Aus der zweiten und dritten Gleichung findet man analog $y=z$, und zusammen mit der vierten Gleichung ergibt sich $x_0=y_0=z_0=u/3$ als Kandidat für das Maximum. Diese Lösung entspricht einem gleichseitigen Dreieck, und $f(x_0,y_0,z_0)=f(u/3,u/3,u/3)=u^4/432$. ■

Beispiel 19 Wir suchen die extremwertverdächtigen Punkte der Funktion

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\langle Ax,x\rangle,$$

wobei A eine symmetrische $n\times n$-Matrix ist, unter der Nebenbedingung $\|x\|=1$, die wir als $g(x)=\|x\|^2-1=0$ schreiben.
Der Gradient von f ist

$$(\operatorname{grad} f)(x)=2x^T A,$$

und der von g ist

$$(\operatorname{grad} g)(x)=2x^T$$

(mit der Definition der Ableitung nachrechnen!). Das zu lösende Gleichungssystem ist also

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} f)(x)-\mu(\operatorname{grad} g)(x) &= 2x^T A-\mu\,2\,x^T=0,\\ g(x) &= \|x\|^2-1\end{aligned}$$

mit dem Lagrange-Parameter $\mu=-\lambda$. Transponieren der ersten Gleichung liefert das System

$$Ax=\mu x\quad\text{mit}\quad\|x\|^2=1.$$

Ein Vektor der Länge 1 ist also genau dann extremwertverdächtig, wenn er ein Eigenvektor zum Eigenwert μ ist. Der zugehörige Funktionswert ist

$$f(x)=\langle Ax,x\rangle=\langle\mu x,x\rangle=\mu\langle x,x\rangle=\mu.$$

Folglich wird f in x unter der Nebenbedingung $\|x\|=1$ genau dann maximal (minimal), wenn x ein Eigenvektor von A zum größten (kleinsten) Eigenwert von A ist. Man beachte, dass die stetige Funktion f auf der kompakten Menge $\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|=1\}$ ihr Maximum und Minimum annehmen muß. Es ist also

$$\begin{aligned}\max_{x\neq0}\frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle} &= \text{größter Eigenwert von } A,\\ \min_{x\neq0}\frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle} &= \text{kleinster Eigenwert von } A.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Man kann die Methode der Lagrange-Multiplikatoren auch benutzen, wenn mehrere Nebenbedingungen zu erfüllen sind. Die Lagrange-Funktion lautet dann

$$L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_r g_r(x)$$

für die Nebenbedingungen $g_1(x) = 0, \ldots, g_r(x) = 0$. ■

14 Wegintegrale

Bisher haben wir ausschließlich Integrale über Intervallen betrachtet. Ziel dieses Abschnittes ist es, Integrale über Kurven zu erklären und zu berechnen. Besonders interessiert uns dabei die Frage, wann ein solches Integral nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve abhängt.

14.1 Wege im $\mathbb{R}^n$

Schon im $\mathbb{R}^2$ lassen sich Kurven nicht immer als Graph einer *reellen Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ darstellen. So müssen beispielsweise für die Einheitskreislinie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ der obere bzw. untere Kreisbogen jeweils durch $y = f_1(x) = +\sqrt{1-x^2}$ bzw. $y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ gesondert beschrieben werden. Eine ganz andere Möglichkeit der Beschreibung von Kurven bieten Parameterdarstellungen wie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos t, y = \sin t \text{ mit } t \in [0,2\pi]\}$ für die Einheitskreislinie. Hier beschreiben wir die Kreislinie als Bild des Intervalls $[0,2\pi]$ unter der Abbildung

$$X : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t).$$

Definition 14.1 *Jede stetige Abbildung $X : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt ein* Weg in $\mathbb{R}^n$. *Dabei heißen $X(a)$* Anfangs- *und $X(b)$* Endpunkt *des Weges. Das Bild von $[a,b]$ unter X, also die Menge $\{X(t) : t \in [a,b]\}$, heißt die zu X gehörende* Kurve *in $\mathbb{R}^n$.*

Man beachte: ein Weg ist eine *Abbildung*, die zugehörige Kurve eine *Punktmenge*. Man kann sich vorstellen, dass durch einen Weg eine *Parametrisierung* der zugehörigen Kurve gegeben ist. Mit den Begriffen „Anfangs- und Endpunkt“ verbindet man die Vorstellung, dass die Kurve von $X(a)$ nach $X(b)$ im Sinne wachsender Parameter $t \in [a,b]$ durchlaufen wird. Man beachte auch, dass zu verschiedenen Wegen gleiche Kurven gehören können. So liefern die Wege

$$\begin{aligned} X_1 &: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t), \\ X_2 &: [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t), \\ X_3 &: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos 3t, \sin 3t), \end{aligned}$$

jeweils die gleiche Kurve, nämlich die Einheitskreislinie im $\mathbb{R}^2$.

Beispiel 1 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist

$$X : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \big(t, f(t)\big)$$

ein Weg, und die zugehörige Kurve ist der Graph von f. ∎

Beispiel 2 Seien $A, B \in \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$X : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto\ tA + (1-t)B$$

ein Weg, und die zugehörige Kurve ist die Verbindungsstrecke von A nach B. ■

Beispiel 3 Der für $r > 0,\ h > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ durch

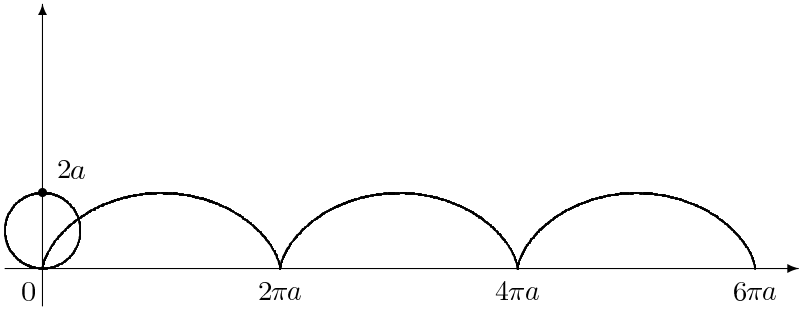
$$X : [0, 2k\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r\cos t, r\sin t, \frac{h}{2\pi}t)$$

definierte Weg liefert als Kurve eine Schraubenlinie vom Radius r mit der Ganghöhe h und mit k Windungen. ■

Beispiel 4 Auf einer Kreisscheibe vom Radius a ist auf dem Rand ein Punkt P markiert. Die Kreisscheibe wird nun auf der Ebene abgerollt. Dabei durchläuft P den Weg

$$X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto a(t - \sin t, 1 - \cos t),$$

und die zugehörige Kurve heißt *Rollkurve* oder *Zykloide*.



■

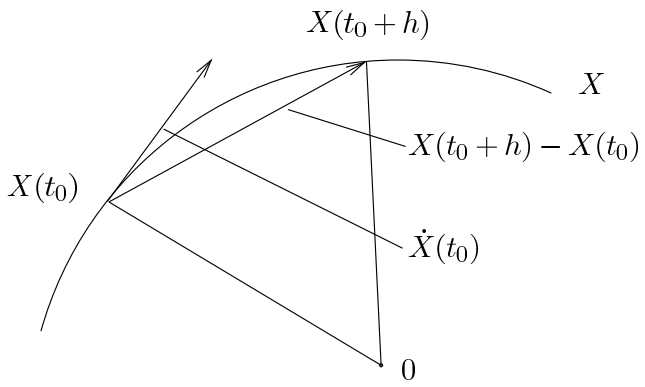
Der Begriff des Weges ist aber weitaus komplexer, als diese einfachen Beispiele vermuten lassen, und er läßt Beispiele zu, die unserer Anschauung völlig widersprechen. So gibt es einen Weg $X : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, dessen zugehörige Kurve das gesamte Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$ ausfüllt (eine sogenannte Peano-Kurve)! Unserer Anschauung am nächsten kommen die stetig differenzierbaren und die stückweise stetig differenzierbaren Wege. Ein Weg $X = (X_1, \ldots, X_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *stetig differenzierbar*, wenn jede seiner Komponenten X_j auf $[a,b]$ stetig differenzierbar ist. Der Weg $X = (X_1, \ldots, X_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

des Intervalles $[a,b]$ gibt, so dass jede Komponente X_j auf jedem Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$ für sich stetig differenzierbar ist.

Ist $X = (X_1, \ldots, X_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und ist $\dot{X}(t_0) = (\dot{X}_1(t_0), \ldots, \dot{X}_n(t_0)) \neq 0$ für ein $t_0 \in (a,b)$, so heißt $\dot{X}(t_0)$ ein *Tangentialvektor* von X im Punkt $X(t_0)$, und die Tangente an die zugehörige Kurve im Punkt $X(t_0)$ wird beschrieben durch

$$T(\lambda) = X(t_0) + \lambda\,\dot{X}(t_0).$$



Mitunter ist es nützlich, dass man Wege addieren kann. Sind $X : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $Y : [b,c] \to \mathbb{R}^n$ zwei Wege mit $X(b) = Y(a)$, so definiert man ihre *Summe* $Z = X \oplus Y$ durch

$$Z : [a,c] \to \mathbb{R}^n, \quad Z(t) = \begin{cases} X(t) & \text{falls } t \in [a,b] \\ Y(t) & \text{falls } t \in [c,d]. \end{cases}$$

Entsprechend definiert man die Summe endlich vieler Wege. Der zu einem Weg $X : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *entgegengesetzte Weg* ist durch

$$X^- : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \quad X^-(t) = X(a+b-t)$$

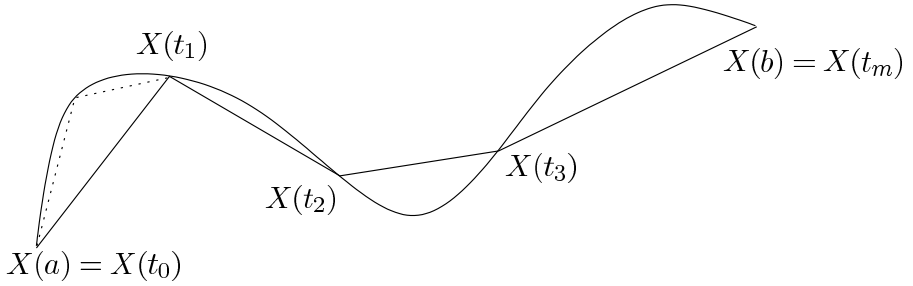
gegeben. Er liefert die gleiche Kurve wie der Ausgangsweg, die jedoch in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird. Jeder stückweise stetig differenzierbare Weg ist eine Summe endlich vieler stetig differenzierbarer Wege. Eine Summe von Wegen wie in Beispiel 2 („Strecken“) heißt auch ein **Polygonzug**.

Zur Definition der *Länge* eines Weges $X : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ wählen wir eine Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ des Intervalls $[a,b]$ und betrachten den Polygonzug durch die Punkte $X(t_0), X(t_1), \ldots, X(t_m)$. Er hat die Länge

$$L(X,Z) := \sum_{i=1}^{m} \|X(t_i) - X(t_{i-1})\|,$$

und für jede Verfeinerung Z' von Z gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$L(X,Z) \le L(X,Z').$$



Definition 14.2 *Der Weg $X : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt* rektifizierbar*, wenn es eine Zahl M gibt mit der Eigenschaft, dass $L(X,Z) \le M$ für alle Zerlegungen Z von $[a,b]$. Die kleinste Zahl M mit dieser Eigenschaft heißt die* Länge $L(X)$ *des Weges X.*

Es ist also

$$L(X) = \sup_Z L(X,Z),$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen Z von $[a,b]$ zu nehmen ist.

Satz 14.3 *Jeder stetig differenzierbare Weg $X : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar, und es gilt*

$$L(X) = \int_a^b \|\dot{X}(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\dot{X}_1(t)^2 + \ldots + \dot{X}_n(t)^2}\,dt.$$

Der folgende Satz führt die Weglängenberechnung für stückweise stetig differenzierbare Wege auf die für stetig differenzierbare Wege zurück.

Satz 14.4 *Ist der Weg Z die Summe $X^{(1)} \oplus \ldots \oplus X^{(m)}$ der stetig differenzierbaren Wege $X^{(j)}$, so ist Z rektifizierbar, und*

$$L(Z) = L\big(X^{(1)}\big) + \ldots + L\big(X^{(m)}\big).$$

Beispiel 5 Der durch die stetige Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0 \\ t\cos\frac{\pi}{t} & \text{für } t \in (0,1] \end{cases}$$

festgelegte Weg $X : [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$ ist *nicht* rektifizierbar. Für die Punkte $t_n = 1/n$ mit $n \ge 1$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \|X(t_{n+1}) - X(t_n)\| \ge |f(t_{n+1}) - f(t_n)| &= \left|\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} - \frac{\cos n\pi}{n}\right| \\ &= \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert bekanntlich. Man kann also nicht jedem Weg eine Länge zuschreiben. ∎

Beispiel 6 Die Länge des Weges

$$X : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (r\cos t, r\sin t) \quad \text{mit } r > 0$$

ergibt sich aus

$$L(X) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{X}_1(t)^2 + \dot{X}_2(t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,dt = 2\pi r. \quad (14.1)$$

Das Ergebnis ist natürlich (?) gleich dem Kreisumfang eines Kreises vom Radius r. Doch haben wir in (14.1) tatsächlich die Länge des Kreisumfangs, d.h. einer Kurve, berechnet? Der Weg

$$Y : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$$

führt auf die gleiche Kurve wie der Weg X, hat jedoch die doppelte Länge wie X, was natürlich daran liegt, dass Y die Kreislinie zweimal durchläuft. Will man also *Kurven*längen berechnen, muß man einen rektifizierbaren Weg wählen, der jeden Punkt der Kurve nur einmal durchläuft. Nur Anfangs- und Endpunkt dürfen gegebenenfalls (wie bei der Kreislinie und anderen geschlossenen Kurven) zusammenfallen. ■

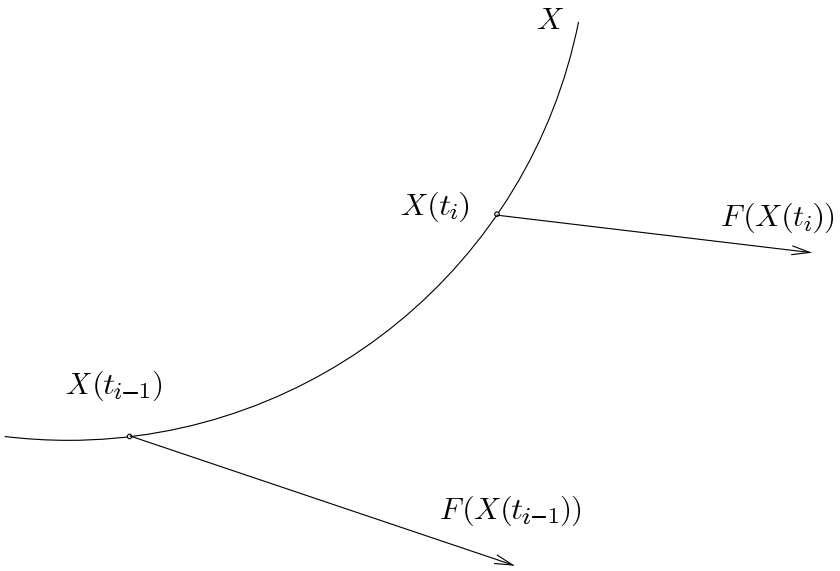
Beispiel 7 Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $X : [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$, so ist

$$L(X) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt. \tag{14.2}$$

14.2 Wegintegrale

Zur Motivation: In einem Kraftfeld F (d.h. ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) bewegt sich ein Massepunkt P entlang eines Weges $X : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Gesucht ist die Arbeit, die bei Bewegung von P entlang des Weges X im Kraftfeld F verrichtet wird. Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Im Punkt $X(t_{i-1})$ des Weges greift der Kraftvektor $F\big(X(t_{i-1})\big)$ an. Die zu verrichtende Arbeit ist jedoch nur von der Komponente von $F\big(X(t_{i-1})\big)$ in Wegrichtung abhängig. Nehmen wir weiter an, dass $X(t_{i-1})$ und $X(t_i)$ nahe beieinander liegen, so dass $F\big(X(t_{i-1})\big) \approx F\big(X(t_i)\big)$, so ist die zu verrichtende Arbeit beim Bewegen von $X(t_{i-1})$ nach $X(t_i)$ ungefähr gleich

$$F\big(X(t_{i-1})\big) \cdot \big(X(t_i) - X(t_{i-1})\big) = \langle F\big(X(t_{i-1})\big), X(t_i) - X(t_{i-1})\rangle.$$



Ist weiter X stetig differenzierbar und liegen t_{i-1} und t_i nahe beieinander, so ist dieser Ausdruck ungefähr gleich

$$F\big(X(t_{i-1})\big) \cdot \dot{X}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) = \langle F\big(X(t_{i-1})\big), \dot{X}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})\rangle.$$

Die gesamte Arbeit beträgt also näherungsweise

$$\sum_{i=1}^{m} F\big(X(t_{i-1})\big) \cdot \dot{X}(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}).$$

Verfeinerung und Grenzübergang liefern schließlich für die Arbeit

$$\int_a^b F\big(X(t)\big) \cdot \dot{X}(t)\, dt.$$

Definition 14.5 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und $X : [a,b] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg. Dann heißt*

$$\int_a^b F\big(X(t)\big) \cdot \dot{X}(t)\, dt \tag{14.3}$$

das Wegintegral von F entlang X.

Statt (14.3) findet man oft auch die Schreibweise

$$\int_X F \cdot dX \quad \text{oder} \quad \int_X F_1 dX_1 + \ldots + F_n dX_n,$$

wobei F_i bzw. X_i die Komponenten von F bzw. X sind.

Beispiel 8 Der Weg X sei gegeben durch

$$X : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (a\cos t, a\sin t, \frac{h}{2\pi}t),$$

und P bewege sich entlang X von $(a, 0, 0)$ nach $(a, 0, h)$. Dabei wirke eine Kraft $F(x) = -\alpha x$ mit einer Konstanten $\alpha > 0$, d.h. P wird mit der Kraft $\|F(x)\| = \alpha\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ in Richtung des Koordinatenursprungs gezogen. Für die zu leistende Arbeit W finden wir

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} F\big(X(t)\big) \cdot \dot{X}(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\alpha(a\cos t, a\sin t, \frac{h}{2\pi}t) \cdot (-a\sin t, a\cos t, \frac{h}{2\pi})dt \\ &= \alpha\int_0^{2\pi} \big(a^2\sin t\cos t - a^2\sin t\cos t - (\frac{h}{2\pi})^2 t\big)dt \\ &= -\alpha(\frac{h}{2\pi})^2\int_0^{2\pi} t\, dt = -\alpha(\frac{h}{2\pi})^2\frac{(2\pi)^2}{2} = -\frac{\alpha h^2}{2}. \end{aligned}$$

Wir betrachten bei gleicher Kraft noch einmal die Bewegung von P von $(a, 0, 0)$ nach $(a, 0, h)$, nun aber entlang des Weges

$$X : [0, h] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (a, 0, t).$$

Dann ist

$$W = \int_0^h -\alpha(a, 0, t) \cdot (0, 0, 1)\, dt = -\alpha\int_0^h t\, dt = -\frac{\alpha h^2}{2},$$

d.h. wir gelangen zum gleichen Resultat. ∎

Beispiel 9 Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, xy)$ und $X : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t)$ (die zugehörige Kurve ist die Strecke von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$). Dann ist

$$\int_0^1 F\big(X(t)\big) \cdot \dot{X}(t)dt = \int_0^1 (2t^2, t^2) \cdot (1, 1)dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1.$$

Bei gleichem F finden wir dagegen für das Wegintegral entlang des Weges

$$X : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, t^2)$$

(der entlang einer Parabel von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ führt)

$$\int_X F \cdot dX = \int_0^1 (t^2 + t^4, t^3) \cdot (1, 2t)dt = \int_0^1 (t^2 + 3t^4)dt = \frac{14}{15},$$

also ein vom Weg abhängiges Ergebnis. ∎

Hier sind einige Regeln für den Umgang mit Wegintegralen.

(a) Ist X^- der zu X entgegengesetzte Weg, so gilt

$$\int_{X^-} F \cdot dX = -\int_X F \cdot dX. \tag{14.4}$$

(b) Es gilt die Abschätzung

$$\left|\int_X F \cdot dX\right| \leq \max_{t\in[a,b]} \|F\big(X(t)\big)\| L(X). \tag{14.5}$$

(c) Ist $Z = X \oplus Y$ die Summe der Wege X und Y, so ist

$$\int_{X\oplus Y} F \cdot dX = \int_X F \cdot dX + \int_Y F \cdot dY. \tag{14.6}$$

Man benutzt (14.6) auch, um das Wegintegral entlang eines nur *stückweise* stetig differenzierbaren Weges zu definieren.

Wir greifen nun die Beobachtung aus Beispiel 8 und 9 auf und fragen, wann ein Wegintegral *wegunabhängig* ist, d.h. nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängt (vgl. Beispiel 8). Hierfür benötigen wir, dass die Wege in Mengen mit speziellen Eigenschaften verlaufen, die wir nun definieren.

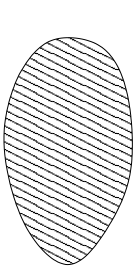
Definition 14.6 (a) *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt* wegzusammenhängend*, wenn sich je zwei Punkte aus M durch einen Weg verbinden lassen, der komplett durch M verläuft.*

(b) *M heißt* konvex*, wenn sich je zwei Punkte aus M durch eine Strecke verbinden lassen, die ganz in M liegt.*

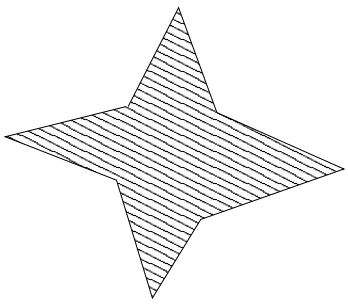
(c) *M heißt* sternförmig*, wenn es einen Punkt $z \in M$ gibt, so dass für jeden Punkt $x \in M$ die Verbindungsstrecke von z nach x ganz in M liegt.*

(d) *M heißt ein* Gebiet*, wenn M offen und wegzusammenhängend ist.*

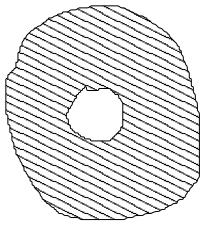
Konvexe Mengen sind sternförmig, und sternförmige Mengen sind wegzusammenhängend.



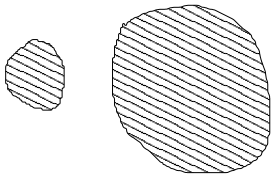
konvex



sternförmig



wegzusammenhängend



nicht wegzusammenhängend

Definition 14.7 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : D \to \mathbb{R}^n$. Existiert eine stetig partiell differenzierbare Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ mit*

$$F(x) = (\operatorname{grad}\varphi)(x) \quad \textit{für } x \in D,$$

so heißt φ ein Potential *von F.*

In Beispiel 8 ist $\varphi(x_1, x_2, x_3) := -\frac{\alpha}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$ ein Potential von $F(x_1, x_2, x_3) = -\alpha(x_1, x_2, x_3)$. Physikalisch interessanter ist folgendes Beispiel.

Beispiel 10 Eine Masse m im Koordinatenursprung übt nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz auf einen Massepunkt der Masse 1 in $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ eine Kraft F der Stärke

$$\|F(x, y, z)\| = \frac{Gm}{\|(x, y, z)\|^2} = \frac{Gm}{x^2 + y^2 + z^2}$$

aus. Diese Kraft weist zum Nullpunkt, hat also die Richtung $-\frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}$. Demnach ist

$$F(x, y, z) = -\frac{Gm}{\|(x, y, z)\|^3}(x, y, z) = -\frac{Gm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z).$$

Man rechnet leicht nach, dass die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Gm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ein Potential für F auf $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ ist (Newtonsches Gravitationspotential). ∎

Satz 14.8 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld mit einem Potential $\varphi : D \to \mathbb{R}$. Sind A und E zwei beliebige Punkte in D und ist $X : [a, b] \to D$ ein beliebiger stückweise stetig differenzierbarer Weg in D mit Anfangspunkt A und Endpunkt E, so gilt für das Wegintegral*

$$\int_X F \cdot dX = \varphi(E) - \varphi(A). \tag{14.7}$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes ist das Wegintegral also wegunabhängig. Man vergleiche (14.7) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Insbesondere ist (wieder unter den Voraussetzungen von Satz 14.8) jedes Wegintegral entlang eines *geschlossenen* Weges (d.h. eines Weges mit $A = E$) gleich Null.

Der folgende Satz hilft bei der Entscheidung, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Potential besitzt.

Satz 14.9 *Sei $D \subseteq R^n$ offen und sternförmig, und $F : D \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Gilt für die Komponenten des Vektorfeldes $F = (F_1, \ldots, F_n)$*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \textit{für } 1 \le i < j \le n \tag{14.8}$$

auf D, so besitzt F ein Potential auf D.

Die Bedingungen des Satzes 14.9 garantieren also die Existenz eines Potentials und damit die Wegunabhängigkeit des Wegintegrals. Es gilt auch die Umkehrung: besitzt das auf der offenen Menge D stetig differenzierbare Vektorfeld ein Potential, so gilt (14.8) (Satz von Schwarz). Man beachte, dass wir in Satz 14.9 die Sternförmigkeit von D fordern müssen. Ein Potential kann aber auch existieren, wenn diese Eigenschaft nicht vorliegt (Beispiel 10: $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ ist nicht sternförmig!). Wir sehen uns die Bedingungen (14.8) für $n = 2$ und $n = 3$ genauer an und zeigen, wie man bei Erfülltsein dieser Bedingung ein Potential finden kann.

Fall n = 2 Sei $F = (F_1, F_2) : D \to \mathbb{R}^2$ auf der offenen und sternförmigen Menge D. Dann reduziert sich (14.8) auf die eine Bedingung

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \quad \text{auf } D. \tag{14.9}$$

Ist dies erfüllt, so versuchen wir, $\varphi : D \to \mathbb{R}$ aus dem Ansatz

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = F_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = F_2 \quad \text{auf } D$$

zu bestimmen. Integration der ersten Gleichung bzgl. x_1 liefert

$$\varphi(x_1, x_2) = \int F_1(x_1, x_2) dx_1 + g(x_2) \tag{14.10}$$

mit einer nicht von x_1, aber von x_2 abhängigen „Integrationskonstanten“ g. Wir leiten (14.10) formal nach x_2 ab und erhalten mit (14.9)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \int F_1(x_1, x_2) dx_1 + g'(x_2) = F_2(x_1, x_2).$$

Hieraus folgt

$$g'(x_2) = F_2(x_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} \int F_1(x_1, x_2) dx_1,$$

und durch unbestimmte Integration bzgl. x_2 gewinnt man g und damit φ. Eine Probe zeigt, ob tatsächlich eine Stammfunktion gefunden wurde.

Beispiel 11 Für $x \neq 0$ und $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$F_1(x, y) = -\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2, \; F_2(x, y) = \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2.$$

Dann ist (14.9) erfüllt, und wir wählen den Ansatz

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + y^2.$$

Integration der ersten Beziehung nach x liefert

$$\varphi(x,y) = \int \big(-\frac{\tan y}{x^2} + 2xy + x^2 \big) dx = \frac{\tan y}{x} + x^2 y + \frac{x^3}{3} + g(y).$$

Wir leiten dies nach y ab und setzen das Ergebnis gleich F_2:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x \cos^2 y} + x^2 + g'(y) \stackrel{!}{=} \frac{1}{x \cos^2 \varphi} + x^2 + y^2.$$

Also ist $g'(y) = y^2$ und damit $g(y) = \frac{y^3}{3} + C$ sowie

$$\varphi(x,y) = \frac{\tan y}{x} + x^2 y + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + C.$$

Sucht man nur *ein* Potential, kann man z.B. $C = 0$ wählen. Die Probe durch Ableiten zeigt, dass tatsächlich ein Potential von F gefunden wurde. ∎

Fall n = 3 Dann ergibt (14.8) die drei Bedingungen

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = \frac{\partial F_3}{\partial x_2}. \tag{14.11}$$

Sind diese erfüllt, machen wir den Ansatz

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = F_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = F_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = F_3$$

für das gesuchte Potential φ. Wir integrieren die erste Gleichung nach x_1

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = \int F_1(x_1,x_2,x_3) dx_1 + g(x_2,x_3) \tag{14.12}$$

und leiten nach x_2 ab:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \int F_1(x_1,x_2,x_3) dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} \stackrel{!}{=} F_2(x_1,x_2,x_3).$$

Es ist also

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = F_2(x_1,x_2,x_3) - \frac{\partial}{\partial x_2} \int F_1(x_1,x_2,x_3) dx_1.$$

Die rechte Seite hängt wegen (14.11) nicht von x_1 ab; wir bezeichnen sie mit $h(x_2,x_3)$ und erhalten durch Integration nach x_2

$$g(x_2,x_3) = \int h(x_2,x_3) dx_2 + \ell(x_3).$$

Einsetzen in (14.12) liefert

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = \int F_1(x_1,x_2,x_3) dx_1 + \int h(x_2,x_3) dx_3 + \ell(x_3).$$

Nun leiten wir noch nach x_3 ab und setzen das Ergebnis gleich F_3:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} \int F_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int h(x_2, x_3) dx_2 + \ell'(x_3) \stackrel{!}{=} F_3(x_1, x_2, x_3),$$

also

$$\ell'(x_3) = F_3(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial}{\partial x_3} \int F_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 - \frac{\partial}{\partial x_3} \int h(x_2, x_3) dx_2.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung hängt nur von x_3 ab, und Integration dieser Gleichung bzgl. x_3 liefert ℓ und damit φ.

Beispiel 12 Sei $F(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$. Das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ erfüllt die Bedingungen (14.8) auf der sternförmigen Menge $\mathbb{R}^3$, so dass mit Sicherheit ein Potential existiert. Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dieses Potential. Aus $\varphi_x = F_1$ folgt durch Integration bzgl. x

$$\varphi(x, y, z) = \int (x + z) dx + g(y, z) = \frac{x^2}{2} + xz + g(y, z).$$

Ableiten nach y ergibt

$$\varphi_y = \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) \stackrel{!}{=} -y - z,$$

woraus folgt

$$g(y, z) = -\frac{y^2}{2} - yz + \ell(z).$$

Also ist

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xz - \frac{y^2}{2} - yz + \ell(z),$$

und nach Ableiten nach z wird

$$\varphi_z = x - y + \ell'(z) \stackrel{!}{=} x - y,$$

d.h. $\ell'(z) = 0$. Es ist also ℓ eine konstante Funktion, d.h.

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} - yz + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

■

15 Integration im $\mathbb{R}^n$

In diesem Kapitel kommen wir zur Definition und den wesentlichen Eigenschaften des Riemann-Integrals einer Funktion von mehreren Veränderlichen. Als Motivation wird uns das Problem der Volumendefinition und -berechnung dienen (genau wie das Problem der Flächenberechnung bei Funktionen einer Veränderlichen).

15.1 Das Riemann-Integral über Intervallen im $\mathbb{R}^n$

Wir beginnen mit der Integration über den „einfachsten“ Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, nämlich über Intervallen, Rechtecken, Quadern usw., die wir unter dem Namen „Intervall im $\mathbb{R}^n$“ zusammenfassen. Während wir im $\mathbb{R}^1$ ausschließlich über Intervalle integriert haben, gibt es beispielsweise im $\mathbb{R}^3$ wesentlich mehr Mengen, über die man integrieren möchte (Kugeln, Pyramiden, ...). Wir werden daher die in diesem Abschnitt angestellten Überlegungen später auf allgemeinere Mengen übertragen.

Seien $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ zwei Punkte des $\mathbb{R}^n$ mit $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Das *abgeschlossene Intervall* $[a, b]$ im $\mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ a_i \leq x_i \leq b_i \ \text{ für alle } i\},$$

und (falls $a_i < b_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$) die Menge

$$(a, b) := (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) = \{(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n : \ a_i < x_i < b_i \ \text{ für alle } i\}$$

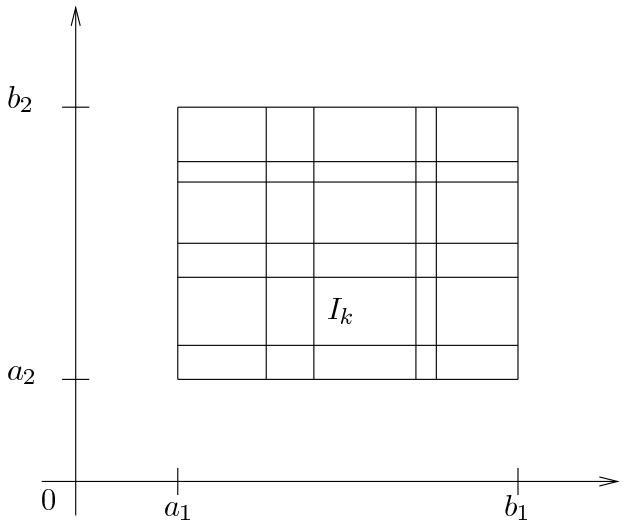
heißt ein *offenes Intervall* im $\mathbb{R}^n$. Ist $I = [a, b]$ oder $I = (a, b)$ ein abgeschlossenes oder offenes Intervall, so erklären wir sein *Maß* $\mu(I)$ durch

$$\mu(I) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Wir erhalten also für

- $n = 1$ gewöhnliche Intervalle, und $\mu(I)$ ist die Länge des Intervalls,
- $n = 2$ Rechtecke, und $\mu(I)$ ist der Flächeninhalt,
- $n = 3$ Quader, und $\mu(I)$ ist das Volumen.

Eine *Zerlegung* Z eines abgeschlossenen Intervalls $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Produkt $Z_1 \times \ldots \times Z_n$ von Zerlegungen Z_i der Intervalle $[a_i, b_i]$. Die *Teilintervalle* der Zerlegung Z erhält man, indem man im Produkt $T_1 \times \ldots \times T_n$ die T_i alle Teilintervalle der Zerlegung Z_i von $[a_i, b_i]$ durchlaufen läßt.



Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall, und Z sei eine Zerlegung von I in Teilintervalle $I_1, \ldots, I_m$. Für jede beschränkte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ erklären wir

$$m_k := \inf\{f(x) : x \in I_k\} \quad \text{sowie} \quad M_k := \sup\{f(x) : x \in I_k\},$$

und wir nennen

$$U(Z, f) := \sum_{k=1}^{m} m_k \mu(I_k)$$

bzw.

$$O(Z, f) := \sum_{k=1}^{m} M_k \mu(I_k)$$

die *Unter-* bzw. *Obersumme* von f bzgl. der Zerlegung Z. Schließlich sei noch

$$U(f, I) := \sup_Z U(Z, f)$$

und

$$O(f, I) := \inf_Z O(Z, f),$$

wobei das Supremum bzw. das Infimum über alle Zerlegungen Z von I zu bilden ist.

Definition 15.1 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Ist*

$$U(f, I) = O(f, I) =: r,$$

so heißt f Riemann-integrierbar *auf I, und der gemeinsame Wert r von $U(f, I)$ und $O(f, I)$ heißt* Riemann-Integral *von f auf I. Als Bezeichnung wählen wir*

$$r = \int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_1, \ldots, x_n) \quad \textit{oder kurz} \quad \int_I f(x) dx.$$

In $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ schreibt man auch

$$\int_I f(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2) = \int_I f(x, y)\, d(x, y)$$

bzw.

$$\int_I f(x_1, x_2, x_3)\, d(x_1, x_2, x_3) = \int_I f(x, y, z)\, d(x, y, z).$$

Als einfaches Beispiel betrachten wir die konstante Funktion $f(x) = c$ auf $I \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$U(Z, f) = \sum_{k=1}^{m} c\mu(I_k) = c \sum_{k=1}^{m} \mu(I_k) = c\mu(I)$$

und analog $O(Z, f) = c\mu(I)$, und wir erhalten

$$O(f, I) = U(f, I) = \int_I c d(x_1, \ldots, x_n) = c\mu(I).$$

Mit der Wahl $c = 1$ wird insbesondere

$$\mu(I) = \int_I d(x_1, \ldots, x_n),$$

d.h. man kann das Maß von I als Integral über die Funktion $f(x) = 1$ darstellen. Wir kommen hierauf noch zurück.

Genau wie im Fall $n = 1$ kann man das Riemann-Integral einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auch als Grenzwert Riemannscher Summen darstellen. Dazu wählt man für jede Zerlegung Z von I in Teilintervalle $I_1, \ldots, I_m$ einen *Zwischenvektor* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ mit $\xi_k \in I_k$ und betrachtet die *Riemannsumme*

$$R(Z, \xi, f) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\mu(I_k).$$

Die folgenden einfachen Eigenschaften des Riemann-Integrals im $\mathbb{R}^n$ beweist man wie im Fall $n = 1$.

Satz 15.2 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall, und $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar.*

a) *Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar, und*

$$\int_I \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) dx = \alpha \int_I f(x) dx + \beta \int_I g(x) dx.$$

b) *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist*

$$\int_I f(x) dx \leq \int_I g(x) dx.$$

c) *Es ist*

$$\Big|\int_I f(x)dx\Big| \le \sup_{x\in I} |f(x)|\,\mu(I).$$

Der folgende Satz ist der Schlüssel zur Berechnung von Riemann-Integralen im $\mathbb{R}^n$. Durch ihn wird die Berechnung eines Integrales auf die Berechnung von zwei Integralen in Räumen von niedrigerer Dimension als n zurückgeführt. Durch mehrfache Anwendung dieses Satzes führt man schließlich die Berechnung eines Integrals über einem Intervall im $\mathbb{R}^n$ auf die Berechnung von „gewöhnlichen" Riemann-Integralen über „gewöhnlichen" Intervallen in $\mathbb{R}^1$ zurück.

Satz 15.3 (Satz von Fubini) *Seien $I_x \subseteq \mathbb{R}^k$ und $I_y \subseteq \mathbb{R}^\ell$ abgeschlossene Intervalle und sei $I = I_x \times I_y \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell = \mathbb{R}^{k+\ell}$. Weiter sei die Funktion $f : I_x \times I_y \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ Riemann-integrierbar auf I.*

a) *Existiert für jedes feste $y \in I_y$ das Riemann-Integral*

$$g(y) := \int_{I_x} f(x,y)dx,$$

so ist die Funktion g Riemann-integrierbar, d.h. es existiert das iterierte Integral

$$\int_{I_y} \Big(\int_{I_x} f(x,y)dx\Big)dy,$$

und es ist

$$\int_I f(x,y)\,d(x,y) = \int_{I_y} \Big(\int_{I_x} f(x,y)dx\Big)dy.$$

b) *Existiert für jedes feste $x \in I_x$ das Riemann-Integral*

$$h(x) := \int_{I_y} f(x,y)dy,$$

so ist h Riemann-integrierbar, das iterierte Integral

$$\int_{I_x} \Big(\int_{I_y} f(x,y)dy\Big)dx$$

existiert, und

$$\int_I f(x,y)d(x,y) = \int_{I_x} \Big(\int_{I_y} f(x,y)dy\Big)dx.$$

Man beachte, dass aus der Existenz der beiden iterierten Integrale

$$\int_{I_y} \Big(\int_{I_x} f(x,y)dx\Big)dy \quad \text{und} \quad \int_{I_x} \Big(\int_{I_y} f(x,y)dy\Big)dx$$

noch nicht die Existenz des Integrals

$$\int_I f(x,y)\,d(x,y) \tag{15.1}$$

folgt. Ein einfaches Kriterium für die Existenz dieses Integrals liefert der folgende Satz.

Satz 15.4 *Ist $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I, so ist f Riemann-integrierbar auf I, d.h. das Integral* (15.1) *existiert.*

Unter den Voraussetzungen von Satz 15.4 existieren auch alle iterierten Integrale aus dem Satz von Fubini, und es gilt

$$\int_I f(x,y)\,d(x,y) = \int_{I_y}\Big(\int_{I_x} f(x,y)dx\Big)dy = \int_{I_x}\Big(\int_{I_y} f(x,y)dy\Big)dx.$$

Beispiel 1 Sei $f(x,y) = \cos(2x+3y)$ auf $I = [0,\frac{\pi}{4}] \times [0,\frac{\pi}{12}]$. Die Funktion f ist auf I stetig, so dass wir $\int_I f(x,y)\,d(x,y)$ mit Hilfe iterierter Integrale bestimmen können. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_I f(x,y)\,d(x,y) &= \int_0^{\pi/4}\Big(\int_0^{\pi/12}\cos(2x+3y)dy\Big)dx \\
&= \int_0^{\pi/4}\frac{1}{3}\sin(2x+3y)\Big|_0^{\pi/12}dx \\
&= \int_0^{\pi/4}\frac{1}{3}\big(\sin(2x+\frac{\pi}{4}) - \sin 2x\big)dx \\
&= -\frac{1}{6}\cos(2x+\frac{\pi}{4}) + \frac{1}{6}\cos 2x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{6}(\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

Das gleiche Resultat hätte natürlich auch die Berechnung von

$$\int_0^{\pi/12}\Big(\int_0^{\pi/4}\cos(2x+3y)dx\Big)dy$$

gebracht. ■

Beispiel 2 Sei $f(x,y,z) = x+y+z+xz$ auf $I = [0,1]\times[1,2]\times[2,3]$. Dann ist f stetig auf I, und die zweifache Anwendung des Satzes von Fubini ergibt

$$
\begin{aligned}
\int_I f(x,y,z)\,d(x,y,z) &= \int_0^1 \Big(\int_{[1,2]\times[2,3]} f(x,y,z)\,d(y,z)\Big) dx \\
&= \int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 (x+y+z+xz)\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_1^2 \big(xz+yz+\frac{z^2}{2}+x\,\frac{z^2}{2}\big)\Big|_2^3 dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_1^2 \big(x+y+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}x\big)dy\,dx \\
&= \int_0^1 \big(\frac{7}{2}xy+\frac{y^2}{2}+\frac{5}{2}y\big)\Big|_1^2 dx \\
&= \int_0^1 \big(\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\big)dx \\
&= \frac{7}{4}x^2+4x\Big|_0^1 = \frac{7}{4}+4 = \frac{23}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Das gleiche Resultat hätten wir beispielsweise auch aus dem iterierten Integral

$$\int_2^3 \int_0^1 \int_1^2 (x+y+z+xz)dy\,dx\,dz$$

gewonnen. ■

15.2 Integration über messbaren Mengen

In diesem Abschnitt geht es um die Integration auf komplizierteren Mengen als auf n-dimensionalen Intervallen. Für jede nichtleere Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ und jede Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ definieren wir die *Fortsetzung* (oder *Erweiterung*) f_B von f durch

$$f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f_B(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. f_B setzt f durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$ fort.

Definition 15.5 *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und beschränkt, und $I \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein abgeschlossenes Intervall mit $B \subseteq I$. Die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ heißt* Riemann-integrierbar auf B, *wenn ihre Fortsetzung f_B Riemann-integrierbar auf I ist. In diesem Fall heißt*

$$\int_B f(x)dx := \int_I f_B(x)dx$$

das Riemann-Integral *von f auf B.*

Man kann (und muss) zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl des Intervalles I ist. Man kann für I also z.B. das kleinste abgeschlossene Intervall wählen, dass B enthält. Man beachte auch, dass Definition 15.5 selbst für $n = 1$ etwas Neues bietet, da B kein Intervall sein muss.

Ob eine Funktion f auf einer Menge B integrierbar ist, hängt sowohl von f als auch von B ab. Insbesondere erwartet man von B, dass wenigstens so einfache Funktionen wie $\chi : B \to \mathbb{R}$, $\chi(x) = 1$, auf B Riemann-integrierbar sind. Die entsprechende Fortsetzung

$$\chi_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in B \\ 0 & \text{wenn } x \notin B \end{cases}$$

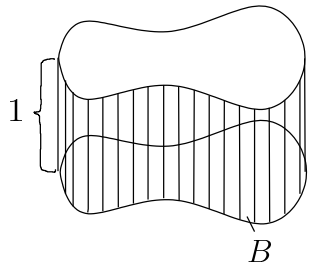
heißt die *charakteristische Funktion von* B.

Definition 15.6 *Eine nichtleere beschränkte Menge* $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *heißt* Jordan-messbar*, wenn ihre charakteristische Funktion* χ_B *Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall heißt*

$$\mu(B) := \int_I \chi_B(x)dx = \int_B 1\,dx = \int_B dx$$

der (n-dimensionale) Jordan-Inhalt *von* B.

Anschauliche Deutung:



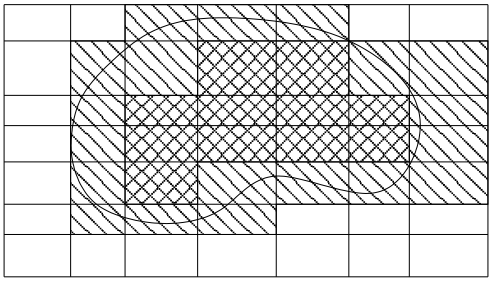
$\int_B dx$ beschreibt das Volumen eines Zylinders über B mit der Höhe 1. Dieses ist Grundfläche $\times$ Höhe, also gleich $\mu(B)$. ■

Deutung über Ober- und Untersummen Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und beschränkt, und sei $I \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes Intervall mit $B \subseteq I$ und mit einer Zerlegung Z von I in Teilintervalle $I_1, \ldots, I_m$. Dann ist

$$\inf_{x \in I_k} \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I_k \text{ ganz in B} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\sup_{x \in I_k} \chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I_k \cap B \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



$\boxslash$ $O(Z,\chi_B)$ $\qquad$ $\boxslash$ $U(Z,\chi_B)$

Für die zugehörigen Ober- und Untersummen gilt also

$$\begin{aligned} U(Z,\chi_B) &= {\sum_k}' \mu(I_k) \\ O(Z,\chi_B) &= {\sum_k}'' \mu(I_k), \end{aligned}$$

wobei die Summationen $\sum_k'$ bzw. $\sum_k''$ über alle Teilintervalle I_k mit $I_k \subseteq B$ bzw. mit $I_k \cap B \neq \emptyset$ erstreckt werden. Die Zahlen

$$U(\chi_B, I) = \sup_Z U(Z,\chi_B) \quad \text{und} \quad O(\chi_B, I) = \inf_Z O(Z,\chi_B)$$

nennt man auch den *inneren* bzw. *äußeren Jordan-Inhalt* von B, und B ist genau dann Jordan-messbar, wenn der äußere und der innere Jordan-Inhalt von B gleich sind. ■

Beispiel 3 Sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x \text{ rational}\}$, und für I wählen wir das Quadrat $[0,1] \times [0,1]$. Da Q in $\mathbb{R}$ dicht liegt, ist für jede Zerlegung Z von I

$$U(Z,\chi_B) = 0, \qquad O(Z,\chi_B) = 1.$$

Also ist B *nicht* Jordan-messbar, und wir können B keinen Flächeninhalt zuordnen. ■

Satz 15.7 *Eine nichtleere beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂B Jordan-messbar ist und den Jordan-Inhalt $\mu(\partial B) = 0$ hat.*

Nun haben wir schon einiges über Jordan-messbare Mengen erfahren, wissen aber noch immer nicht, ob so einfache Mengen wie ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ oder eine Kugel im $\mathbb{R}^3$ Jordan-messbar sind. Wegen Satz 15.7 benötigen wir Kriterien dafür, dass eine beschränkte Menge Jordan-messbar ist und den Jordan-Inhalt 0 hat. Solche Mengen heißen *Jordansche Nullmengen*. Hier sind zwei solcher Kriterien.

Satz 15.8 *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist der Graph von f, d.h. die Menge*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} :\ x \in B,\ y = f(x)\}$$

eine Jordansche Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq B \to \mathbb{R}^m$ heißt *Lipschitzstetig* auf B, wenn es eine Konstante L so gibt, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in B.$$

Lipschitzstetige Funktionen sind offenbar stetig; die Umkehrung gilt nicht. Alle linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind Lipschitzstetig.

Satz 15.9 *Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge und $f : N \to \mathbb{R}^m$ mit $m \geq n$ Lipschitzstetig. Dann ist $f(N)$ eine Jordansche Nullmenge im $\mathbb{R}^m$.*

Schließlich vermerken wir noch ein Resultat über die Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen.

Satz 15.10 *Stetige Funktionen auf kompakten Jordan-messbaren Mengen sind Riemann-integrierbar.*

Als nächstes geben wir einige Resultate über das Rechnen mit Riemann-Integralen auf Jordan-messbaren Mengen an. Das Analogon zu Satz 15.2 lautet wie folgt.

Satz 15.11 *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, und $f, g : B \to \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar.*

a) *Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar auf B, und*

$$\int_B \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int_B f(x)dx + \beta \int_B g(x)dx.$$

b) *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in B$, so ist auch*

$$\int_B f(x)dx \leq \int_B g(x)dx.$$

c) *Es ist*

$$\Big|\int_B f(x)dx\Big| \leq \sup_{x \in B} |f(x)| \cdot \mu(B).$$

Nun sehen wir uns noch an, wie das Integral bei fester Funktion f vom Integrationsbereich abhängt. Dazu vereinbaren wir, dass $\int_\emptyset f\,dx = 0$.

Satz 15.12 a) *Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so sind auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ Jordan-messbar.*

b) *Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und ist f auf A und auf B Riemann-integrierbar, so ist f auch auf $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_{A \cup B} f(x)dx + \int_{A \cap B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx.$$

Setzt man insbesondere $f = \chi_{A\cup B}$, so folgt aus Aussage (b)

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{15.2}$$

Man sagt, dass sich zwei Jordan-messbare Mengen A, B *nicht überlappen*, wenn sie nur Randpunkte gemeinsam haben, d.h. wenn $A \cap B \subseteq \partial A \cap \partial B$. Da der Rand einer Jordan-messbaren Menge nach Satz 15.7 das Maß 0 hat, gilt:

Satz 15.13 *Seien A, B, f wie in Satz 15.12, und A und B seien nicht überlappend. Dann gilt*

$$\int_{A\cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx.$$

Insbesondere gilt unter den Voraussetzungen dieses Satzes

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) \cup \mu(B). \tag{15.3}$$

Nun können wir auch begründen, dass Mengen wie Kreise und Kugeln Jordan-messbar sind. Zunächst ist $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^1$ als Intervall Jordan-messbar. Auf $[-1, 1]$ sind die Funktionen $f^+(x) := \sqrt{1 - x^2}$ und $f^-(x) := -\sqrt{1 - x^2}$ stetig und daher Riemann-integrierbar (Satz 15.10). Nach Satz 15.8 sind die Graphen

$$G(f^\pm) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-1, 1], \ y = f^\pm(x)\}$$

Jordansche Nullmengen. Wegen $G(f^+) \cup G(f^-) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ und (15.2) ist die Einheitskreislinie im $\mathbb{R}^2$ eine Jordansche Nullmenge. Satz 15.7 zeigt nun, dass die Einheitskreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ Jordan-messbar ist. Analog betrachten wir auf der (nun als Jordan-messbar erkannten) Einheitskreisscheibe $B_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ die Funktionen

$$g^\pm : B_2 \to \mathbb{R}, \quad g^\pm(x, y) = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Diese sind stetig, und wir erhalten wie oben die Jordan-Messbarkeit der Einheitskugel $B_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Durch vollständige Induktion überträgt man dieses Resultat auf Kugeln im $\mathbb{R}^n$.

Nachdem wir nun wissen, dass Kreisscheiben im $\mathbb{R}^2$ Jordan-messbar sind, möchten wir auch den Jordan-Inhalt von Kreisscheiben berechnen. Allgemeiner geht es darum, den Jordan-Inhalt so genannter Ordinatenmengen zu bestimmen. Die *Ordinatenmenge* $M(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq B \to [0, \infty)$ ist die Menge

$$M(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ x \in B, \ 0 \leq y \leq f(x)\},$$

d.h. die Menge aller Punkte "zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion". Im Fall $B = [a, b] \subseteq \mathbb{R}^1$ haben wir früher bereits als Flächeninhalt definiert:

$$\text{Inhalt von } M(f) = \int_a^b f(x)dx. \tag{15.4}$$

Dieser Inhaltsbegriff stimmt mit dem Jordan-Inhalt überein. Genauer gilt folgender Satz.

Satz 15.14 *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $f \geq 0$. Dann ist $M(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Jordan-messbar, und es gilt*

$$\mu\big(M(f)\big) = \int_B f(x)dx.$$

Dieser Satz rechtfertigt im Nachhinein die Definition (15.4) des Flächeninhalts. Ist allgemeiner $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und sind $f_1, f_2 : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $f_1(x) \leq f_2(x)$ für alle $x \in B$, so gilt für die Menge

$$M(f_1, f_2) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \; x \in B, \; f_1(x) \leq y \leq f_1(x)\}$$

$$\mu\big(M(f_1, f_2)\big) = \int_B \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx. \tag{15.5}$$

Beispiel 4 Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ und $B = [x_0 - r, \, x_0 + r]$. Für

$$f_1(x) = y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}, \quad f_2(x) = y_0 + \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$$

ist $M(f_1, f_2)$ gerade die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt (x_0, y_0) und dem Radius r, und für ihren Jordan-Inhalt finden wir

$$\begin{aligned} \mu\big(M(f_1, f_2)\big) &= 2\int_{x_0 - r}^{x_0 + r} \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}\, dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - t^2}\, dt \\ &= 2\Big[\frac{1}{2}\, t\sqrt{r^2 - t^2} + \frac{1}{2}\, r^2 \arcsin\frac{t}{r}\Big]_{-r}^{r} = \pi r^2. \end{aligned}$$

■

15.3 Integration über Normalbereiche

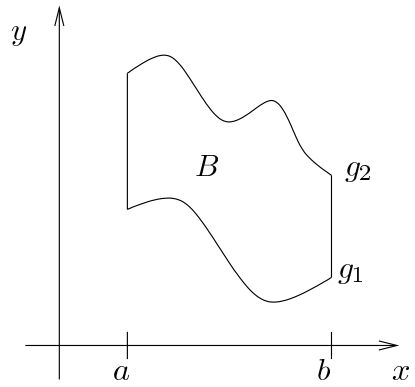
Wir kommen nun zur praktischen Bestimmung von Riemann-Integralen. Besonders einfach wird diese für Integrale über so genannte *Normalbereiche*. Unter einem *Normalbereich bzgl. der x-Achse* versteht man eine Menge B der Gestalt

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; a \leq x \leq b, \; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

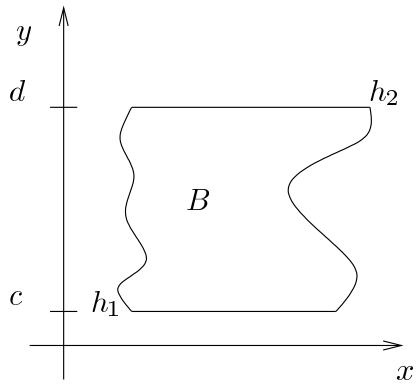
mit stetigen Funktionen $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, wobei $g_1(x) \leq g_2(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Eine solche Menge heißt auch *y-projizierbar*. Ein *Normalbereich bzgl. der y-Achse* (oder eine *x-projizierbare Menge*) ist eine Menge der Gestalt

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; c \leq y \leq d, \; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

mit stetigen Funktionen $h_1, h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$, wobei $h_1(y) \leq h_2(y)$ für alle $y \in [c, d]$.



Normalbereich bzgl. x-Achse



Normalbereich bzgl. y-Achse

Normalbereiche sind nach Satz 15.8 Jordan-messbar, und der Satz von Fubini liefert:

Satz 15.15 *Sei B ein Normalbereich und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig. In den obigen Bezeichnungen gilt*

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \Big)\,dx,$$

falls B ein Normalbereich bzgl. der x-Achse ist und

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_c^d \Big(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \Big)\,dy,$$

falls B ein Normalbereich bzgl. der y-Achse ist.

Ist B kein Normalbereich, so versucht man, ihn in endlich viele nicht überlappende Normalbereiche zu zerlegen.

Normalbereiche betrachtet man auch in Räumen $\mathbb{R}^n$ mit $n > 2$. Sei z.B. $B_1 := [a,b]$. Auf B_1 seien g_1, g_2 stetige Funktionen mit $g_1 \le g_2$, und sei

$$B_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in B_1,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$

Auf B_2 seien h_1, h_2 stetige Funktionen mit $h_1 \le h_2$, und sei

$$B_3 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in B_2,\ h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)\}.$$

Dann ist B_3 Jordan-messbar, und für jede auf B_3 stetige Funktion f ist

$$\int_{B_3} f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Beispiel 5 Das Volumen V des Tetraeders mit den Ecken $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ und $(0,0,c)$ läßt sich bestimmen als Volumen der Punktmenge zwischen dem Dreieck in der (x,y)-Ebene mit den Ecken $(0,0,0)$, $(a,0,0)$ und $(0,b,0)$ und der durch $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, also $z=f(x,y)=c\big(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\big)$, beschriebenen Ebene. Daher ist

$$\begin{aligned} V &= \int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^a \int_0^{b-\frac{b}{a}x} c\big(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\big)\,dy\,dx \\ &= \int_0^a c\big(y-\frac{xy}{a}-\frac{y^2}{2b}\big)\Big|_0^{b-\frac{b}{a}x}\,dx = \int_0^a \frac{bc}{2}\big(1-\frac{x}{a}\big)^2\,dx = \frac{abc}{6}. \end{aligned}$$ ■

Beispiel 6 Sei $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le r^2,\, y\ge 0\}$ mit fest gewähltem $r>0$, und sei $f(x,y)=x^2y$ auf B. Der Halbkreis B ist ein Normalbereich sowohl bzgl. der x-Achse als auch bzgl. der y-Achse. Wir beschreiben ihn z.B. als

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\in[-r,r],\ 0\le y\le\sqrt{r^2-x^2}\}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_B x^2y\,d(x,y) &= \int_{-r}^{r}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x^2y\,dy\,dx \\ &= \int_{-r}^{r} \frac{x^2y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} x^2(r^2-x^2)dx \\ &= \frac{1}{2}\big(r^2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\big)\Big|_{-r}^{r} = \frac{2}{15}\,r^5. \end{aligned}$$ ■

Beispiel 7 Ein gerader Kreiskegel mit Radius R und Höhe h ist ein Normalbereich in $\mathbb{R}^3$. Wir haben nämlich $B_1=[-R,R]$,

$$\begin{aligned} B_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x\in B_1,\ -\sqrt{R^2-x^2}\le y\le\sqrt{R^2-x^2}\} \\ &\quad (=\text{Grundfläche des Kegels}), \\ B_3 &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ (x,y)\in B_2,\ 0\le z\le h-\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\}. \end{aligned}$$

Für das Volumen V des Kegels finden wir daher

$$\begin{aligned} V &= \int_{B_3} d(x,y,z) = \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_0^{h-\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}} dz\,dy\,dx \\ &= \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \big(h-\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}\big)dy\,dx \\ &= h\int_{-R}^{R}\Big(y-\frac{1}{R}\big(\frac{y}{2}\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{2}\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})\big)\Big)\Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dx \\ &= 2h\int_0^R \Big(\sqrt{R^2-x^2}-\frac{x^2}{2R}\ln\frac{R+\sqrt{R^2-x^2}}{R-\sqrt{R^2-x^2}}\Big)dx. \end{aligned}$$

Wir substituieren $x = R\sin t$ und erhalten

$$\begin{aligned} V &= 2h\int_0^{\pi/2}\Big(R\cos t - \frac{R}{2}\sin^2 t\,\ln\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\Big)\,R\cos t\,dt \\ &= 2hR^2\int_0^{\pi/2}\Big(\cos^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 t\cos t\,\ln\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\Big)dt. \end{aligned}$$

Das Integral $\int \sin^2 t\,\cos t\,\ln\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\,dt$ kann durch partielle Integration bestimmt werden: der Faktor $\sin^2 t\,\cos t$ wird integriert und hat $\frac{1}{3}\sin^3 t$ als eine Stammfunktion, und $\ln\frac{1+\cos t}{1-\cos t}$ wird differenziert und ergibt $\frac{-2}{\sin t}$. Eingesetzt erhält man schließlich

$$V = 2hR^2\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\sin^3 t\,\ln\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{6}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt\Big),$$

also

$$V = \frac{1}{3}\pi h R^2. \qquad \blacksquare$$

15.4 Die Substitutionsregel

Nach diesen mühsamen Berechnungen für ein einfaches und wohlbekanntes Resultat fragen wir uns, ob wir nicht von vornherein die Rechnung durch eine andere Beschreibung des Kegels hätten vereinfachen können. Stellen wir z.B. die Grundfläche des Kegels in Polarkoordinaten dar, so wird der Kegel beschrieben durch

$$\{(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3:\ r\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi],\ z\in[0,h-\frac{h}{R}\,r]\},$$

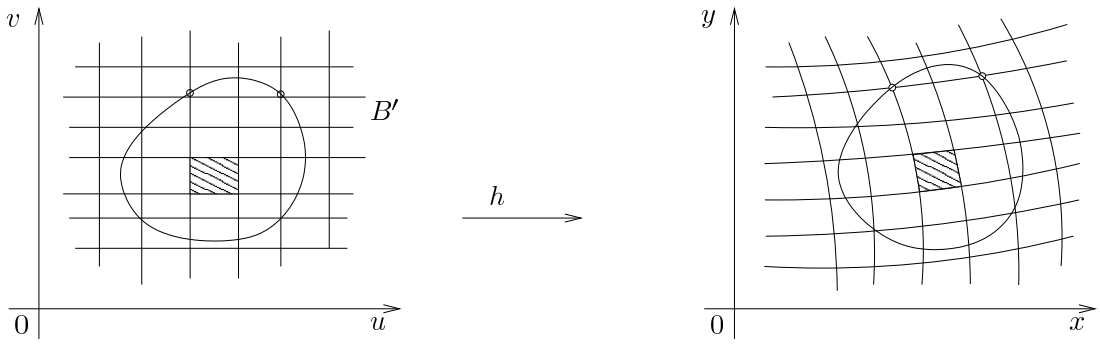
was eine wesentlich einfachere Integration erwarten läßt. Genau wie bei der Substitutionsregel im $\mathbb{R}^1$ entsteht dabei das folgende Problem: Wie hat man in $\int_B f(x,y,z)\,d(x,y,z)$ den Ausdruck $d(x,y,z)$ zu transformieren, wenn man von (x,y,z) zu neuen Koordinaten (r,φ,z) übergehen möchte? Zur Motivation betrachten wir das Integral

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y)$$

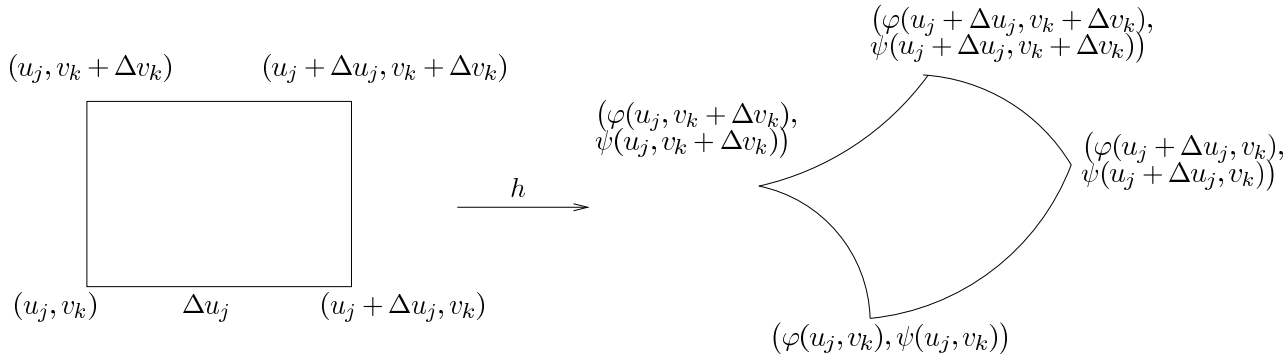
über einer Jordan-messbaren Menge B im $\mathbb{R}^2$, versehen mit x,y-Koordinaten. Wir führen neue Veränderliche u,v durch die Substitution $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ ein, die einen Bereich B' des $\mathbb{R}^2$ (mit den Koordinaten u,v; man spricht auch von der uv-Ebene) injektiv auf B abbildet, d.h. die Abbildung

$$h: B'\to B,\quad (u,v)\mapsto h(u,v)=\big(\varphi(u,v),\,\psi(u,v)\big)$$

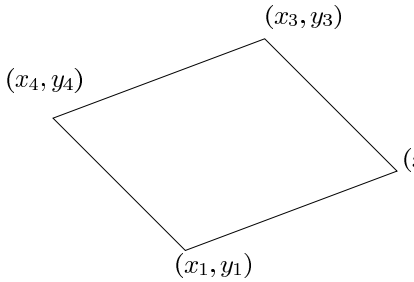
ist eine Bijektion. Durch die Abbildung h wird ein Rechteck-Netz über B' in ein „krummliniges“ Netz über B übersetzt:



Sehen wir uns genauer an, wie das schraffierte Rechteck in der uv-Ebene abgebildet wird:



Der Flächeninhalt des Rechteckes (wie er in der Definition des Riemann-Integrals über B' vorkommt) ist $\Delta u_j \, \Delta v_r$. Für die Berechnung der Fläches des „krummlinigen Parallelogramms“ nehmen wir an, dass Δu_j und Δv_r so klein sind, dass dieses Parallelogramm fast ein gewöhnliches Parallelogramm ist. Für den Flächeninhalt eines gewöhnlichen Parallelogramms mit den Ecken $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ gilt bekanntlich



$$\text{Fläche} = |(x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

bzw. in Determinantenschreibweise

$$\text{Fläche} = \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{pmatrix} \right|$$

(vgl. Abschnitt 10.1). Der Flächeninhalt des „krummlinigen Parallelogramms“ ist

also ungefähr gleich

$$\left|\det\begin{pmatrix} \varphi(u_j+\Delta u_j,v_k)-\varphi(u_j,v_k) & \varphi(u_j,v_k+\Delta v_k)-\varphi(u_j,v_k) \\ \psi(u_j+\Delta u_j,v_k)-\psi(u_j,v_k) & \psi(u_j,v_k+\Delta v_k)-\psi(u_j,v_k) \end{pmatrix}\right|.$$

Ist φ stetig partiell differenzierbar und Δu_j sehr klein, so ist weiter

$$\varphi(u_j+\Delta u_j,v_k)-\varphi(u_j,v_k) \approx \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_j,v_k)\cdot\Delta u_j.$$

Mit analogen Voraussetzungen für ψ erhalten wir also, dass der Flächeninhalt des „krummlinigen Parallelogramms“ etwa gleich

$$\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_j,v_k) & \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_j,v_k) \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u_j,v_k) & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u_j,v_k) \end{pmatrix}\right| \Delta u_j\,\Delta v_k$$

ist. Die in diesem Ausdruck stehende Matrix ist gerade die Jacobi-Matrix von h an der Stelle (u_j,v_k), d.h. unser „krummliniges Parallelogramm“ hat etwa den Flächeninhalt

$$|\det h'(u_j,v_k)|\,\Delta u_j\,\Delta v_k.$$

Näherungsweise sollte also gelten

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) \approx \sum_{j,k} f\big(\varphi(u_j,v_k),\,\psi(u_j,v_k)\big)\,|\det h'(u_j,v_k)|\,\Delta u_j\,\Delta v_k,$$

und wir erwarten die Substitutionsregel

$$\int_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_{B'} f\big(\varphi(u,v),\,\psi(u,v)\big)\,|\det h'(u,v)|\,d(u,v).$$

Es zeigt sich, dass die hier „abgeleitete“ Substitutionsregel tatsächlich gilt und dass sie auch auf Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen verallgemeinert werden kann.

Satz 15.16 *Sei $H\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, und $h: H\to\mathbb{R}^n$ sei injektiv und stetig partiell differenzierbar. Die Determinante* $\det h'(t)$ *sei auf H entweder überall positiv oder überall negativ. Weiter sei T eine kompakte und Jordan-messbare Teilmenge von H, und f sei eine auf $h(T)$ stetige reellwertige Funktion. Dann ist $h(T)$ Jordan-messbar, f ist auf $h(T)$ Riemann-integrierbar, und es ist*

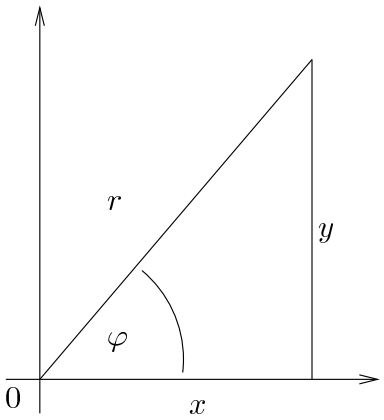
$$\int_{h(T)} f(x)dx = \int_T f\big(h(t)\big)\,|\det h'(t)|\,dt. \tag{15.6}$$

Diese Formel gilt auch dann noch, wenn – entgegen den obigen Voraussetzungen – die Determinante $\det h'(t)$ *auf einer Teilmenge N von T gleich* 0 *ist oder wenn $g|_N$ auf einer Teilmenge N von T nicht injektiv ist, sofern nur N den Jordan-Inhalt* 0 *hat.*

Der Beweis der Substitutionsregel (15.6) kann z.B. mit vollständiger Induktion nach n erfolgen und ist recht aufwändig. Wir sehen uns nun einige spezielle und häufig benutzte Transformationen genauer an.

Polarkoordinaten Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten (x, y) und den Polarkoordinaten (r, φ) eines Punktes im $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$



Ein Integral auf Polarkoordinaten zu transformieren, heißt also, die Substitution

$$(x, y) = h(r, \varphi) = (r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)$$

vorzunehmen. Es ist

$$h'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

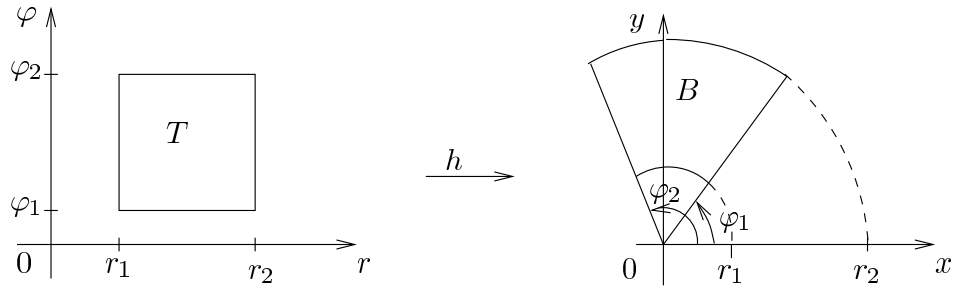
und daher $\det h'(r, \varphi) = r$. Für $r > 0$ ist also $\det h'(r, \varphi)$ stets positiv. Weiter ist klar, dass h den Bereich $\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\, 0 \le \varphi < 2\pi\}$ injektiv auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ abbildet und dass h insbesondere auf dem Gebiet $H := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0,\, 0 < \varphi < 2\pi\}$ injektiv ist. Auf diesem Gebiet kann man also die Substitutionsregel anwenden, und es folgt

Folgerung 15.17 *Ist $B = h(T)$, wobei $T \subseteq H$ kompakt und Jordan-messbar ist, so ist für jede auf B stetige Funktion f*

$$\int_B f(x, y)\, d(x, y) = \int_T f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\, r\, d(r, \varphi). \tag{15.7}$$

Ist beispielsweise $T = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : r_1 < r < r_2,\, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$ ein Rechteck in H, so ist $B = h(T)$ ein Kreisring, und mit dem Satz von Fubini wird

$$\int_B f(x, y)\, d(x, y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi) r\, dr\, d\varphi. \tag{15.8}$$



In der Praxis ist T häufig ein Rechteck, welches im Streifen

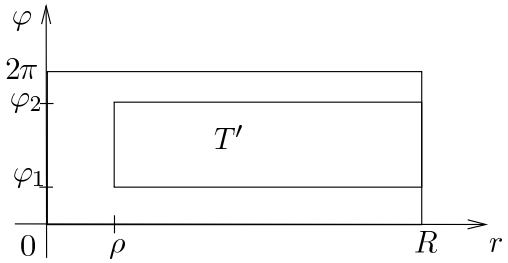
$$\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \, r \geq 0, \, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

liegt und Teile des Randes dieses Streifens enthält, so dass die Voraussetzungen des Satzes 15.16 nicht erfüllt sind. Dennoch gilt auch in diesem Fall die Formel (15.8), was man sich wie folgt klar macht. Sei etwa

$$T = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \leq r \leq R, \, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

und

$$T' = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 < \rho \leq r \leq R, \, 0 < \varphi_1 < \varphi < \varphi_2 < 2\pi\}.$$



Auf T' gilt (15.7), d.h. es ist

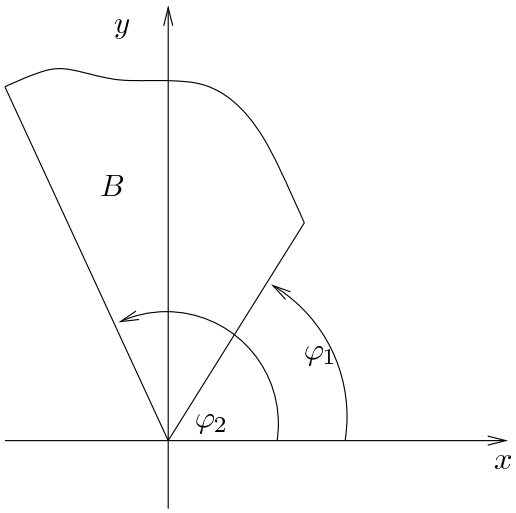
$$\int_{h(T')} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{T'} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\, r\, d(r,\varphi),$$

und aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} &\Big| \int_T f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\, r d(r,\varphi) - \int_{T'} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\, r d(r,\varphi) \Big| \\ &\quad = \Big| \int_{T\setminus T'} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\, r d(r,\varphi) \Big| \\ &\quad \leq \sup_{(r,\varphi)\in T} |f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)| \cdot \mu(T\setminus T') \end{aligned}$$

folgt, dass das Integral über T' für $\rho \to 0$, $\varphi_1 \to 0$ und $\varphi_2 \to 2\pi$ gegen das entsprechende Integral über T strebt.

Beispiel 8 Sei $0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi$, und die Funktion $g : [\varphi_1, \varphi_2] \to (0, \infty)$ sei stetig. Dann ist der Flächeninhalt von $B = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2,\ 0 \le r \le \rho(\varphi)\}$ gleich



$$\mu(B) = \int_B d(x,y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{\rho(\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\rho^2(\varphi)}{2}\,d\varphi. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 9 Häufig benutzt man auch *verallgemeinerte Polarkoordinaten*

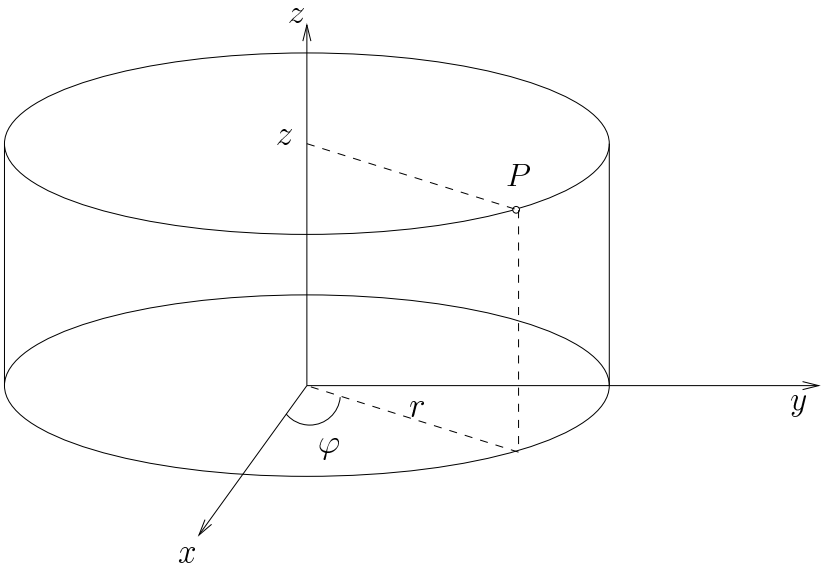
$$(x, y) = h(r, \varphi) = (ar\cos\varphi,\, br\sin\varphi) \quad \text{mit } a, b > 0.$$

Dann ist $\det h'(r, \varphi) = abr$ (Nachrechnen!), und man findet z.B. für den Flächeninhalt der Ellipse $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$, dass

$$\mu(E) = \int_E d(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{2}\,d\varphi = ab\pi. \qquad \blacksquare$$

Zylinderkoordinaten Die Zylinderkoordinaten (r, φ, z) eines Punktes $P \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten (x, y, z) sind gegeben durch

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$



Für die Transformationsfunktion

$$(x, y, z) = h(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi,\, r\sin\varphi,\, z)$$

gilt

$$\det h'(r, \varphi, z) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

Folgerung 15.18 *Ist T eine kompakte und Jordan-messbare Teilmenge von*

$$H := \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : r > 0,\, 0 < \varphi < 2\pi,\, -\infty < z < \infty\},$$

so ist für jede auf $h(T)$ stetige Funktion f

$$\int_{h(T)} f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_T f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi, z)\, r d(r, \varphi, z). \tag{15.9}$$

Die Formel (15.9) gilt auch dann noch, wenn T ein Quader

$$T = (r_1, r_2) \times (\varphi_1, \varphi_2) \times (z_1, z_2) \quad \text{mit } 0 \le r_1 < r_2,\, 0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi$$

ist. In diesem Fall geht (15.9) über in

$$\int_{h(T)} f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi,\, z)\, r dr d\varphi dz.$$

Berechnen Sie als Übungsaufgabe nochmals das Kegelvolumen, nun aber unter Benutzung von Zylinderkoordinaten.

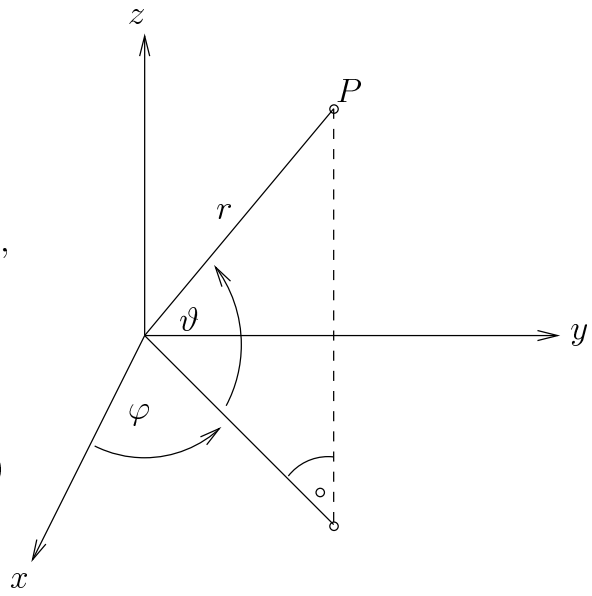
Kugelkoordinaten Die Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) sind mit den kartesischen Koordinaten (x, y, z) verknüpft durch

$$x = r\cos\vartheta\cos\varphi, y = r\cos\vartheta\sin\varphi, z = r\sin\vartheta,$$

wobei $r \geq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$. Für die Transformationsfunktion

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= h(r, \vartheta, \varphi) \\ &= (r\cos\vartheta\cos\varphi,\, r\cos\vartheta\sin\varphi,\, r\sin\vartheta)\end{aligned}$$

gilt



$$\det h'(r, \vartheta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\cos\varphi & -r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} = -r^2\cos\vartheta.$$

Folgerung 15.19 *Ist T eine kompakte Jordan-messbare Teilmenge von*

$$H := \{(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : \, r > 0, \, -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, \, 0 < \varphi < 2\pi\},$$

so ist für jede auf $h(T)$ stetige Funktion f

$$\int_{h(T)} f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_T f(r\cos\vartheta\cos\varphi,\, r\cos\vartheta\sin\varphi,\, r\sin\vartheta) r^2\cos\vartheta\, d(r, \vartheta, \varphi).$$

Diese Formel gilt auch noch, wenn $T = [r_1, r_2] \times [\vartheta_1, \vartheta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$ mit $0 \leq r_1 < r_2$, $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ und $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ ist. Mit Fubini kann man dann schreiben

$$\begin{aligned}&\int_{h(t)} f(x, y, z)\, d(x, y, z) \\ &\quad = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\vartheta\cos\varphi,\, r\cos\vartheta\sin\varphi,\, r\sin\vartheta)\, r^2\cos\vartheta\, dr d\vartheta d\varphi.\end{aligned}$$

Beispiel 10 Die Kugel B mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und Radius $R > 0$ ist das Bild des Quaders $T = [0, R] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$ unter der oben beschriebenen Transformation. Für das Kugelvolumen finden wir daher

$$\begin{aligned}
\mu(b) &= \int_B d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^R r^2 \cos\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R^3}{3} \cos\vartheta d\vartheta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3} \sin\vartheta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi = \frac{2}{3} R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Erholsame Semesterferien und eine erfolgreiche Mathe A-Prüfung wünscht das Mathe-für-ET Team.