Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl.-Math. Petra Csomos
Dipl.-Math. Michael Klotz
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
27.06.2008

13. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, BSc. ET, CE, EPE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G44 (Jordan-Messbarkeit)

Kreuzen Sie alle wahren bzw. allgemeingültigen Aussagen an.

- ☐ Das Intervall $I = [1,2]\times[3,4]\times[0,5] \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Jordan-messbar und hat Jordan-Inhalt $\mu(I) = 5$.
- ☐ Das Intervall $(1,2) \times [3,4) \times [0,5] \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Jordan-messbar und hat Jordan-Inhalt 5.
- ☐ Eine Menge im $\mathbb{R}^n$, die aus einem einzigen Punkt besteht, ist Jordan-messbar und hat den Inhalt 0, d.h., sie ist eine (Jordansche) Nullmenge.
- ☐ Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so sind auch $A \cup B, A \cap B$ und $A \backslash B$ Jordan-messbar.
- ☐ Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so ist auch $A \cup B$ Jordan-messbar und hat Inhalt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- ☐ Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so ist auch $A \cup B$ Jordan-messbar und es gilt $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
- ☐ Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar, so sind auch $A \cup B$ und $A \cap B$ Jordan-messbar und es gilt $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- ☐ Die Vereinigung zweier Nullmengen ist eine Nullmenge.
- ☐ Eine nichtleere beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂B Jordan-messbar ist und den Jordan-Inhalt $\mu(\partial B) = 0$ hat.
- ☐ Eine nichtleere beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂B Jordan-messbar ist und $\mu(\partial B) \neq 0$ gilt.

Aufgabe G45 (Riemann-Integrierbarkeit)

Kreuzen Sie alle allgemeingültigen Aussagen an.

- ☐ Jede stetige Funktion auf dem Intervall $[1,2] \times [3,4] \times [0,5] \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Riemann-integrierbar.
- ☐ Jede stetige Funktion auf dem Intervall $(1,2) \times [3,4) \times [0,5] \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Riemann-integrierbar.
- ☐ Stetige Funktionen auf offenen Jordan-messbaren Mengen sind Riemann-integrierbar.
- ☐ Stetige Funktionen auf kompakten Jordan-messbaren Mengen sind Riemann-integrierbar.

Aufgabe G46 (Satz von Fubini)

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$. Begründen Sie, warum die Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := x^2 + y^3 + 2xy^2$$

Riemann-integrierbar ist, und berechnen Sie dann das Integral $\int_A f(x,y)\ d(x,y)$.

(b) Wir betrachten den Quader $Q := A \times [0,5] \subseteq \mathbb{R}^3$ und die Funktion $g\colon Q \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y,z) := (x^2 + y^3 + 2xy^2)z.$$

Begründen Sie, warum die Funktion g Riemann-integrierbar ist, und berechnen Sie dann das Integral $\int_Q g(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

Aufgabe G47 (Jordan-Messbarkeit)

Wir zeigen, dass die Menge

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1\right\}$$

Jordan-messbar ist. (Was für eine Menge von Punkten ist das?)

(a) Beschreiben sie den Rand von A mithilfe von Graphen $G(f^{\pm})$ von Funktionen f^+ und f^- auf einem geeigneten abgeschlossenen Intervall.

(b) Sind die Definitionsbereiche der Funktionen $f^{\pm}$ Jordan-messbar? Sind die beiden Funktionen Riemann-integrierbar? Wenden Sie Satz 15.8 an, um die Jordan-Messbarkeit von $G(f^+) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $G(f^-) \subseteq \mathbb{R}^2$ zu überprüfen und die Inhalte $\mu(G(f^{\pm}))$ anzugeben.

(c) Zeigen Sie mithilfe von Satz 15.7, dass A Jordan-messbar ist.

(d) Satz 15.14 (mit anschließender Verallgemeinerung) hätte uns die Arbeit ein wenig abgekürzt: Beschreiben Sie die Menge A als Menge $M(f_1, f_2)$ von Punkten zwischen zwei Graphen von Funktionen f_1 und f_2 und bestimmen Sie dann den Inhalt der Menge. (Hinweis: Eine Stammfunktion von $\sqrt{1-x^2}$ ist durch $\frac{1}{2}\big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\big)$ gegeben.)

Aufgabe G48 (Satz von Fubini)

Gegeben seien das Intervall $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{falls } (x,y) \in I \backslash \{(0,0)\} \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f in $(0,0)$ nicht stetig ist (und dass sie auch durch einen anderen Funktionswert in (0,0) nicht stetig gemacht werden kann).

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ dy \right) dx = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\ dx \right) dy = -\frac{1}{2}$$

gilt.

Erläutern Sie, warum die Funktion f nicht Riemann-integrierbar sein kann.