Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl.-Math. Petra Csomos
Dipl.-Math. Michael Klotz
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
20.06.2008

12. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, BSc. ET, CE, EPE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G40 (Länge eines Weges)

Berechnen Sie die Länge der folgenden Wege X und r:

(a) $X(t) = (t^3, \frac{3}{2}t^2), \quad t \in [1,2]$.
Hinweis: Beachte $\int t\sqrt{t^2+a^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\sqrt{(t^2+a^2)^3} + const$ für $a \in \mathbb{R}$.

(b) $r(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe G41 (Wegintegrale)

Berechnen Sie das Wegintegral von f und g längs α und γ:

(a) $f(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy), \quad \alpha: \; y = x^2, \; x \in [-1,1]$.
Hinweis: Parametrisieren Sie zuerst den Weg α mit $t \in [-1,1]$, um eine Kurve $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big) : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ zu bekommen.

(b) $g(x,y) = (-y, x), \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \; t \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe G42 (Potential)

Wir betrachten das Vektorfeld $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x,y) = (x^2 + 2xy - y^2, x^2 - 2xy - y^2)$. Besitzt F ein Potential? Geben Sie alle Stammfunktionen φ von F an.

Hausübung

Aufgabe H39 (Länge eines Weges) (2+2 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der folgenden Wege:

(a) $p(t) = (3t, 3t^2, 2t^3), \quad t \in [0,1]$.

(b) $q(t) = (\mathrm{e}^{-t}\cos t, \mathrm{e}^{-t}\sin t, \mathrm{e}^{-t}), \quad t \in [0,a]$.

Aufgabe H40 (Wegintegrale) (4+2 Punkte)

Berechnen Sie das Wegintegral der folgenden Funktionen.

(a) $h(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ längs des Weges $r: \; y = 1 - |1-x|, \; x \in [0,2]$.
Hinweis: Parametrisieren Sie zuerst den Weg r mit $t \in [0,2]$, dann zerlegen Sie das Integral bezüglich der zwei Teile des Weges.

(b) $k(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ entlang des Kreises um $(5,6)$ mit Radius 2.
Tipp: Beachten Sie, dass der Kreis ein geschlossener Weg ist.

Aufgabe H41 (Potential) (2+4+2+2 Punkte)

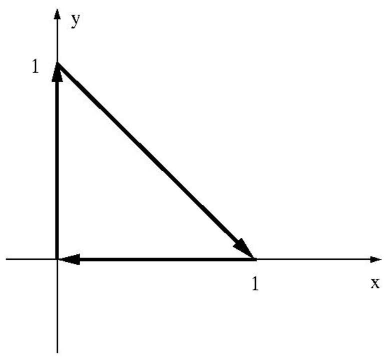
Gegeben sei das Vektorfeld $F(x,y) = (x,y)$.

(a) Besitzt F ein Potential?

(b) Geben Sie alle Stammfunktionen an.

(c) Berechnen Sie $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} F$.

(d) Zeigen Sie, dass $\int\limits_{\Delta} F = 0$, wo Δ die folgende Dreieck bedeutet (siehe Skizze).



Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 20. Juni 2008 vor der Übung.