Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl.-Math. Petra Csomos
Dipl.-Math. Michael Klotz
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
13.06.2008

11. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, BSc. ET, CE, EPE, Mechatronik"

Gruppenübung

Aufgabe G36 (Parameterabhängige Integrale)
Sei F eine stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Für $y \in \mathbb{R}$ definiere die Funktion

$$g(y) = \int_0^y (x+y)F(x)\mathrm{d}x \quad \text{für } (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \; .$$

Bestimmen Sie die zweite Ableitung $g''(y)$.

Aufgabe G37 (Implizite Funktionen)
Betrachten Sie das nichtlineare Gleichungsystem

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + 3y^2 + 6z^2 \\ 0 &= x + y + z \,. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses System in einer Umgebung des Punktes $(0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ eindeutig nach y, z aufgelöst werden kann, d.h. es gibt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ so dass $y = f_1(x), z = f_2(x)$ das System löst.

(b) Berechnen Sie $f'(0)$.

Aufgabe G38 (Lokale Umkehrbarkeit)
Zeige, dass die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

für jedes $(x,y) \neq (0,0)$ lokal umkehrbar ist. Ist F auch global umkehrbar? Bestimme das Urbild $F^{-1}(\{(a,b)\})$ eines beliebigen Punktes $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Aufgabe G39 (Methode von Lagrange)
Bestimmen Sie mit Hilfe einer Lagrange-Funktion die Extremwerte von

$$f(x,y) = xy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + 4y^2 - 2 = 0$.

Hausübung

Aufgabe H36 (Parameterabhängige Integrale) (6 Punkte)

Für $y \in \mathbb{R}$ gegeben sei die Funktion

$$g(y) = \int_{y}^{y^2} \mathrm{e}^{-x^2 y} \mathrm{d}x \ .$$

Berechnen Sie ihre zweite Ableitung $g''(y)$.

Aufgabe H37 (Implizite Funktionen) (4+4 Punkte)

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(x, y_1, y_2) &= x^3 + y_1^3 + y_2^3 - 7 = 0 \\ f_2(x, y_1, y_2) &= xy_1 + y_1 y_2 + y_2 x + 2 = 0 \ . \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass dieses System in einer Umgebung des Punktes $(2, -1, 0)$ eindeutig nach y_1, y_2 aufgelöst werden kann, d.h. es gibt eine Funktion $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ so dass $y_1 = g_1(x), y_2 = g_2(x)$ das System löst.

(b) Berechnen Sie $g'(2)$.

Aufgabe H38 (Methode von Lagrange) (6 Punkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad f(x, y) = \mathrm{e}^{x+3y}, \\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 10. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 20. Juni 2008 vor der Übung.