Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl.-Math. Petra Csomos
Dipl.-Math. Michael Klotz
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
30.05.2008

9. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, BSc. ET, CE, EPE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G30 (Differenzierbarkeit und lineare Approximation)
Sei B eine reelle $n \times n$-Matrix. Wir betrachten die Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle Bx, x\rangle$. Wir wollen zeigen, dass die Funktion F differenzierbar ist und dass ihre Ableitung $F'(x^0)$ an jeder Stelle x^0 durch die lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle (B^T + B)x^0, x\rangle$ gegeben ist.

(a) Finden Sie eine reelle Funktion $r\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sodass die Gleichung

$$F(x^0 + h) = F(x^0) + A(h) + ||h||r(h)$$

aus Definition 13.12 erfüllt ist. (Für $h = 0$ gilt diese Gleichung trivialerweise unabhängig vom definierten Wert $r(0)$. Definieren Sie $r(0) := 0$.)

(b) Zeigen Sie, dass $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$ gilt. (Tipp: Denken Sie an die Ungleichung von Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$. Außerdem dürfen Sie folgende Aussage verwenden: Für jede lineare Abbildung D gibt es eine reelle Konstante λ, sodass $||Dx|| \leq \lambda ||x||$ für alle Vektoren x gilt.)

(c) Zusatz: Schreiben Sie die Formel $F(x^0 + h) \approx \dots$ hin, mit der sich $F(x^0 + h)$ näherungsweise berechnen lässt.

Aufgabe G31 (Kettenregel)
Man betrachte die beiden Vektorfelder $F = (F_1, F_2)^T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $G = (G_1, G_2)^T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die durch

$$\begin{aligned} F_1(x,y) &= x^2, \qquad & F_2(x,y) &= \exp(y), \\ G_1(x,y) &= x\cos(y), \qquad & G_2(x,y) &= \cos(x) \end{aligned}$$

gegeben sind. Es ist die Funktionalmatrix von $H := F \circ G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$H(x,y) = F(G(x,y)) = (F_1(G_1(x,y), G_2(x,y)), F_2(G_1(x,y), G_2(x,y))) \tag{1}$$

zu bestimmen.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen F_1, F_2, G_1, G_2.

(b) Wie können Sie mithilfe von (a) schnell erkennen, dass die Funktionen F und G differenzierbar sind?

(c) Setzen Sie aus den partiellen Ableitungen aus (a) die Funktionalmatrizen $J_F(x,y)$ und $J_G(x,y)$ zusammen.

(d) Da F und G differenzierbar sind, ist nach der Kettenregel auch $F \circ G$ differenzierbar. Stellen Sie $J_F(G_1(x,y), G_2(x,y))$ auf, und bestimmen Sie $J_H(x,y)$ nach der Kettenregel durch Matrizenmultiplikation. Geben Sie $J_H(\pi/2, \pi)$ an. Sie können das Ergebnis überprüfen, indem Sie H gemäss (1) explizit berechnen und daraus die Funktionalmatrix $J_H(x,y)$ bilden.

Aufgabe G32 (Differenzierbarkeit, Gradient und Richtungsableitung)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = xy + 2x\sin(y + \pi/2) + \exp(-y)\cos(x).$$

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion f. Ist f differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls ihre Ableitung an.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ von f an der Stelle $(x,y) = (0,0)$.

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $f'((0,0), v)$ in Richtung $v = (-3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$.

(d) Für welche Richtungen w verschwindet $f'((0,0), w)$, d.h. wann gilt $f'((0,0), w) = 0$?

Hausübung

Aufgabe H30 (Differenzierbarkeit) (3+3 Punkte)

In Aufgabe (H28) haben wir gezeigt, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

stetig in $(0,0)$ ist und dass sie auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar ist. Wir zeigen durch einen indirekten Beweis, dass f in $(0,0)$ trotzdem nicht differenzierbar ist. (Ergebnisse aus H28 dürfen verwendet werden).

(a) Angenommen, f wäre in $(0,0)$ differenzierbar. Stellen Sie die Jacobi-Matrix auf und berechnen Sie die Funktion $r\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in der Gleichung aus Definition 13.12; (r(0) nicht berechnen).

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$ nicht erfüllt ist.

Aufgabe H31 (Differenzierbarkeit, lineare Approximation, Richtungsableitung)(3+2+2+2 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto 4x^2y + xy^2 + e^z$.

(a) Überpüfen Sie, ob die Funktion f differenzierbar ist und geben Sie gegebenenfalls ihre Ableitung $Df(p)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ im Punkt $p = (1,2,0)$ an.

(b) Berechnen Sie näherungsweise $f(1.1, 1.9, 0.15)$ mithilfe der linearen Approximation.

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ in Richtung $v = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)$.

(d) Berechnen Sie den Winkel, den der Gradient $\nabla f(p)$ und die Richtung v einschließen.

Aufgabe H32 (Satz von Schwarz) (2+3 Punkte)

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partiellen Ableitungen existieren und von der Sie die partielle Ableitung $f_x(x,y,z) = \sin(x)e^{yz}$ auf ganz $\mathbb{R}^3$ kennen. Existiert die partielle Ableitung f_{yx} zweiter Ordnung (also die partielle Ableitung von f_y nach x)? Berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geben kann, für die $f_x(x,y) = \sin(x)y$ und $f_y(x,y) = \cos(x)$ gelten.

Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 6. Juni 2008 vor der Übung.