Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl.-Math. Petra Csomos
Dipl.-Math. Michael Klotz
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
16.05.2008

7. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, BSc. ET, CE, EPE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G22 (Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen)
Sei (f_n) eine Funktionenfolge von reellen Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ und sei f eine weitere reelle Funktion auf D. Kreuzen Sie alle allgemeingültigen Aussagen an.

- ☐ Wenn (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, dann konvergiert (f_n) punktweise gegen f.
- ☐ Wenn (f_n) punktweise gegen f konvergiert, dann konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
- ☐ Wenn (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, dann ist $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$.
- ☐ Wenn $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$ gilt, dann konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
- ☐ Wenn die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$ konvergiert, dann kovergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ punktweise.
- ☐ Wenn die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$ konvergiert, dann kovergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig.
- ☐ Wenn die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ punktweise konvergiert, dann konvergiert die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$.
- ☐ Wenn die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert die Zahlenreihe $\sum_{n=1}^\infty ||f_n||_\infty$.

Aufgabe G23 (Fourierreihen)

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihen der 2π-periodischen Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |\sin x|$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \pi - e^2 \frac{\cos(3x)}{2}.$$

Stimmen Fourierreihe und Funktion überein?

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ und gelte $0 < a < 1$. Bezeichne f_a die 1-periodische Funktion, für die gilt

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{falls } a < x < 1 \end{cases}$$

Skizzieren Sie die Funktion f_a für $a = 0.25$ auf dem Intervall $[-1, 2]$. Bestimmen Sie dann die Fourierreihe von f_a (für allgemeines a). Konvergiert die Reihe? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion und überprüfen Sie, ob diese mit f_a übereinstimmt.

Tipp: Es gilt
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)).$$

Aufgabe G24 (Fourierreihen und Berechnung von Reihen)
Bezeichne f die 2π-periodische Funktion, für die $f(x) = x^2$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ gilt.

(a) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Hausübung

Aufgabe H23 (Fourierreihen) (2+6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x)\cos(x).$$
Stimmen Fourierreihe und Funktion überein?

(b) Wir betrachten die 4-periodische Funktion g mit
$$g(x) = x\sin(\frac{2\pi}{4}x) \quad \text{falls } -2 \leq x < 2.$$
Bestimmen Sie ihre Fourriereihe. Konvergiert die Reihe? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzfunktion. (Beachten Sie auch den Tipp aus der Gruppenübung.)

Aufgabe H24 (Fourierreihen und Berechnung von Reihen) (1+6+2+3 Punkte)
Bezeichne f die 2π-periodische Funktion, für die
$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$
gilt.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

(c) Konvergiert die Fourierreihe? Wenn ja, wie sieht die Grenzfunktion aus?

(d) Bestimmen Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 23. Mai 2008 vor der Übung.