Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl. Math. Petra Csomos
Dipl. Math. Michael Klotz
Dipl.-Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
2.5.2008

5. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, BSc. ET, CE, EPE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G15 (Funktionenfolgen und Integration)
Sei

$$f_n : (0,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} n & x < \frac{1}{n} \\ 0 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

(a) Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise?

(b) Konvergiert die Funktionenfolge f_n gleichmäßig?

(c) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

und vergleichen Sie die Werte.

(d) Sei $a \in (0,1)$. Berechnen Sie

$$\int_a^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^1 f_n(x)dx$$

und vergleichen Sie die Werte.

Aufgabe G16 (Funktionenfolgen und Differentation)
Sei

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^n}{n}$$

(a) Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise?

(b) Konvergiert die Funktionenfolge f_n gleichmäßig?

(c) Berechnen Sie

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} f_n'$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse. An welchen Stellen treten Unterschiede auf und wie sind diese zu erklären?

Aufgabe G17 (Potenzreihen)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^7 x^n}{2n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4nx)^n}{2n^3}?$$

Wie sieht das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzintervalls aus?

Hausübung

Aufgabe H15 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz) (2+2 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\geq 1}$ und $(g_n)_{n\geq 1}$ mit

$$f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{x}\right\}$$

und

$$g_n : (0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \min\left\{n, \frac{1}{x}\right\}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(Hinweis: Eine Skizze der Funktionen kann hilfreich sein.)

Aufgabe H16 (Funktionenreihen und gleichmäßige Konvergenz) (3 Punkte)

Untersuchen Sie die folgende Funktionenreihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad x \in [0,1]$$

Aufgabe H17 (Funktionenfolgen und Differentation) (2+2 Punkte)

Sei

$$f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto -2e^{-2nx}.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

gleichmäßig konvergiert und berechnen Sie die Funktion, gegen die sie konvergiert.

(b) Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe der Ableitungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$$

gleichmäßig konvergiert und berechnen Sie die Funktion, gegen die sie konvergiert. Zum Berechnen der Grenzfunktion können Sie das Ergebnis von Aufgabenteil (a) benutzen.

Aufgabe H18 (Potenzreihen) (3+3+3 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + n^2 2^n) x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(x+5)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n?$$

Wie sieht bei der zweiten Reihe das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzintervalls aus?

Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 9. Mai 2008 vor der Übung.