



5. Übungsblatt zur „Mathematik II für ET, WI(ET), SpoInf, IKT, IST, BSc. ET, CE, EPE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G15 (Funktionsfolgen und Integration)

Sei

$$f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} n & x < \frac{1}{n} \\ 0 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

- (a) Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise?
- (b) Konvergiert die Funktionenfolge f_n gleichmäßig?
- (c) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

und vergleichen Sie die Werte.

- (d) Sei $a \in (0, 1)$. Berechnen Sie

$$\int_a^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^1 f_n(x) dx$$

und vergleichen Sie die Werte.

Aufgabe G16 (Funktionsfolgen und Differentiation)

Sei

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^n}{n}$$

- (a) Gegen welche Funktion konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise?
- (b) Konvergiert die Funktionenfolge f_n gleichmäßig?
- (c) Berechnen Sie

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'$$

und vergleichen Sie die Ergebnisse. An welchen Stellen treten Unterschiede auf und wie sind diese zu erklären?

Aufgabe G17 (Potenzreihen)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^7 x^n}{2n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4nx)^n}{2n^3}?$$

Wie sieht das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzintervalls aus?

Hausübung**Aufgabe H15** (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

(2+2 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_{n \geq 1}$ und $(g_n)_{n \geq 1}$ mit

$$f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \max \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{x} \right\}$$

und

$$g_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \min \left\{ n, \frac{1}{x} \right\}$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(Hinweis: Eine Skizze der Funktionen kann hilfreich sein.)

Aufgabe H16 (Funktionenreihen und gleichmäßige Konvergenz)

(3 Punkte)

Untersuchen Sie die folgende Funktionenreihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad x \in [0, 1]$$

Aufgabe H17 (Funktionenfolgen und Differentiation)

(2+2 Punkte)

Sei

$$f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -2e^{-2nx}.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

gleichmäßig konvergiert und berechnen Sie die Funktion, gegen die sie konvergiert.

(b) Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe der Ableitungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$$

gleichmäßig konvergiert und berechnen Sie die Funktion, gegen die sie konvergiert. Zum Berechnen der Grenzfunktion können Sie das Ergebnis von Aufgabenteil (a) benutzen.

Aufgabe H18 (Potenzreihen)

(3+3+3 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + n^2 2^n) x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} (x+5)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n?$$

Wie sieht bei der zweiten Reihe das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzintervalls aus?

Abgabe der Hausübungen: Am Freitag den 9. Mai 2008 vor der Übung.